

Пример вычисления оператора предсказывающей деконволюции и отфильтрованного сигнала

Исходные данные:

Сигнал $s(t)$, заданный $M = 11$ отсчётами: $\{4; 8; 4; 0; -2; -4; -2; 0; 1; 2; 1\}$, интервал (задержка) предсказания $\alpha = 3$.

Порядок вычислений:

1. Графически изобразим сигнал:

Значения сигнала $s(t)$											
Номер отсчёта	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Амплитуда	4	8	4	0	-2	-4	-2	0	1	2	1

2. Рассчитаем для сигнала автокорреляционную функцию (АКФ). Учитывая симметричность АКФ относительно оси ординат, вычислить только неотрицательные отсчёты функции.
Формула АКФ:

$$b_s(m) = \sum_{k=0}^{M-1-k} s(k) \cdot s(k+m) \quad (1)$$

В частности, для имеющихся исходных данных $s(t)$:

$$b_s(0) = \sum_{k=0}^{10} s(k) \cdot s(k) = \sum_{k=0}^{10} s^2(k) = 4^2 + 8^2 + 4^2 + 0 + (-2)^2 + (-4)^2 + (-2)^2 + 0 + 1 + 2^2 + 1 = 126$$

$$\begin{aligned} b_s(1) &= \sum_{k=0}^9 s(k) \cdot s(k+1) = s(0) \cdot s(1) + s(1) \cdot s(2) + s(2) \cdot s(3) + s(3) \cdot s(4) + s(4) \cdot s(5) + \\ &+ s(5) \cdot s(6) + s(6) \cdot s(7) + s(7) \cdot s(8) + s(8) \cdot s(9) + s(9) \cdot s(10) = \\ &= 4 \cdot 8 + 8 \cdot 4 + 4 \cdot 0 + 0 \cdot (-2) + (-2) \cdot (-4) + (-4) \cdot (-2) + (-2) \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 84 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_s(2) &= \sum_{k=0}^8 s(k) \cdot s(k+2) = s(0) \cdot s(2) + s(1) \cdot s(3) + s(2) \cdot s(4) + s(3) \cdot s(5) + s(4) \cdot s(6) + \\ &+ s(5) \cdot s(7) + s(6) \cdot s(8) + s(7) \cdot s(9) + s(8) \cdot s(10) = \\ &= 4 \cdot 4 + 8 \cdot 0 + 4 \cdot (-2) + 0 \cdot (-4) + (-2) \cdot (-2) + (-4) \cdot 0 + (-2) \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 11 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_s(3) &= \sum_{k=0}^7 s(k) \cdot s(k+3) = s(0) \cdot s(3) + s(1) \cdot s(4) + s(2) \cdot s(5) + s(3) \cdot s(6) + s(4) \cdot s(7) + \\ &+ s(5) \cdot s(8) + s(6) \cdot s(9) + s(7) \cdot s(10) = \\ &= 4 \cdot 0 + 8 \cdot (-2) + 4 \cdot (-4) + 0 \cdot (-2) + (-2) \cdot 0 + (-4) \cdot 1 + (-2) \cdot 2 + 0 \cdot 1 = -40 \end{aligned}$$



$$b_s(4) = \sum_{k=0}^6 s(k) \cdot s(k+4) = s(0) \cdot s(4) + s(1) \cdot s(5) + s(2) \cdot s(6) + s(3) \cdot s(7) + s(4) \cdot s(8) +$$

$$+ s(5) \cdot s(9) + s(6) \cdot s(10) =$$

$$= 4 \cdot (-2) + 8 \cdot (-4) + 4 \cdot (-2) + 0 \cdot 0 + (-2) \cdot 1 + (-4) \cdot 2 + (-2) \cdot 1 = -60$$

$$b_s(5) = \sum_{k=0}^5 s(k) \cdot s(k+5) = s(0) \cdot s(5) + s(1) \cdot s(6) + s(2) \cdot s(7) + s(3) \cdot s(8) + s(4) \cdot s(9) +$$

$$+ s(5) \cdot s(10) =$$

$$= 4 \cdot (-4) + 8 \cdot (-2) + 4 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + (-2) \cdot 2 + (-4) \cdot 1 = -40$$

$$b_s(6) = \sum_{k=0}^4 s(k) \cdot s(k+6) = s(0) \cdot s(6) + s(1) \cdot s(7) + s(2) \cdot s(8) + s(3) \cdot s(9) + s(4) \cdot s(10) =$$

$$= 4 \cdot (-2) + 8 \cdot 0 + 4 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + (-2) \cdot 1 = -6$$

$$b_s(7) = \sum_{k=0}^3 s(k) \cdot s(k+7) = s(0) \cdot s(7) + s(1) \cdot s(8) + s(2) \cdot s(9) + s(3) \cdot s(10) =$$

$$= 4 \cdot 0 + 8 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 0 \cdot 1 = 16$$

$$b_s(8) = \sum_{k=0}^2 s(k) \cdot s(k+8) = s(0) \cdot s(8) + s(1) \cdot s(9) + s(2) \cdot s(10) =$$

$$= 4 \cdot 1 + 8 \cdot 2 + 4 \cdot 1 = 24$$

$$b_s(9) = \sum_{k=0}^1 s(k) \cdot s(k+9) = s(0) \cdot s(9) + s(1) \cdot s(10) =$$

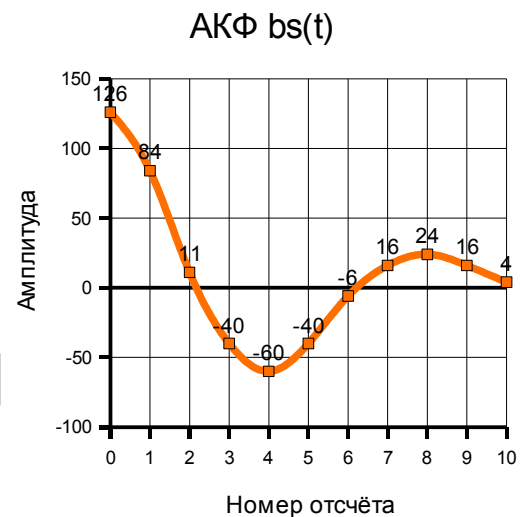
$$= 4 \cdot 2 + 8 \cdot 1 = 16$$

$$b_s(10) = \sum_{k=0}^0 s(k) \cdot s(k+10) = s(0) \cdot s(10) =$$

$$= 4 \cdot 1 = 4$$

Составим таблицу значений АКФ и построим её график:

Значения АКФ $b_s(t)$										
Номер	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Амплитуда	126	84	11	-40	-60	-40	-6	16	24	16



3. Составим выражение для определения оператора фильтра при помощи z -преобразования:

$$H(z) = \frac{B(z^{1+\alpha})}{B(z)} \quad (2)$$

где $B(z)$ — z -преобразование АКФ, а $B(z^{1+\alpha})$ — z -преобразование АКФ, задержанной во времени на α отсчётов:

$$B(z) = \sum_{k=0}^{M-1-\alpha} b_s(k) \cdot z^k \quad (3)$$

В нашем случае:

$$B(z) = \sum_{k=0}^7 b_s(k) \cdot z^k = b_s(0) + b_s(1) \cdot z + b_s(2) \cdot z^2 + b_s(3) \cdot z^3 + b_s(4) \cdot z^4 + b_s(5) \cdot z^5 + b_s(6) \cdot z^6 + b_s(7) \cdot z^7$$

$$B(z^{1+3}) = \sum_{k=3}^{10} b_s(k) \cdot z^k = b_3 \cdot z^3 + b_4 \cdot z^4 + b_5 \cdot z^5 + b_6 \cdot z^6 + b_7 \cdot z^7 + b_8 \cdot z^8 + b_9 \cdot z^9 + b_{10} \cdot z^{10}$$

Введём обозначение $b_k = b_s(k)$. Тогда:

$$H(z) = \frac{B(z^4)}{B(z)} = \frac{b_3 \cdot z^3 + b_4 \cdot z^4 + b_5 \cdot z^5 + b_6 \cdot z^6 + b_7 \cdot z^7 + b_8 \cdot z^8 + b_9 \cdot z^9 + b_{10} \cdot z^{10}}{b_0 + b_1 \cdot z + b_2 \cdot z^2 + b_3 \cdot z^3 + b_4 \cdot z^4 + b_5 \cdot z^5 + b_6 \cdot z^6 + b_7 \cdot z^7}$$

Подставляя числовые значения, получим

$$H(z) = \frac{-40 \cdot z^3 - 60 \cdot z^4 - 40 \cdot z^5 - 6 \cdot z^6 + 16 \cdot z^7 + 24 \cdot z^8 + 16 \cdot z^9 + 4 \cdot z^{10}}{126 + 84 \cdot z + 11 \cdot z^2 - 40 \cdot z^3 - 60 \cdot z^4 - 40 \cdot z^5 - 6 \cdot z^6 + 16 \cdot z^7}$$

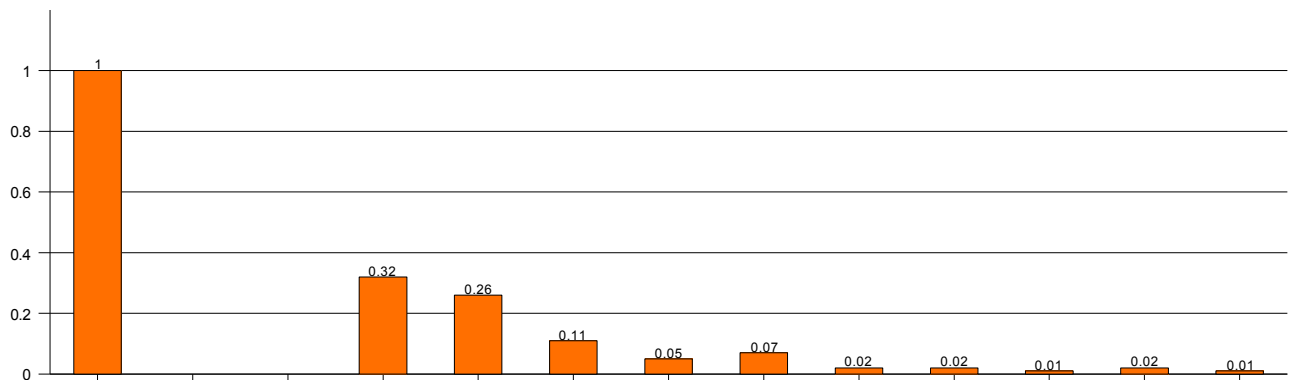
Найдём значения $H(z)$ путём деления многочлена на многочлен. Будем искать $H(z)$ в виде бесконечного степенного ряда, ограничившись вычислением $N = 10$ младших степеней. Порядок вычисления приведён на рисунке на следующей странице.

Составим таблицу значений оператора фильтра и дополним её вычитанием прогнозных значений из наблюдаемых:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$H(z)$	0	0	0	-0.32	-0.26	-0.11	-0.05	-0.07	-0.02	-0.02	-0.01	-0.02	-0.01
$1 - H(z)$	1	0	0	0.32	0.26	0.11	0.05	0.07	0.02	0.02	0.01	0.02	0.01

Оператор $H_{\Sigma}(z) = 1 - H(z)$ реализует обратный прогностический фильтр. Представим его графически.

Прогностический фильтр



Порядок вычисления значений оператора фильтра путём деления многочленов «уголком»

-40.00	z^3	-60.00	z^4	-40.00	z^5	-6.00	z^6	+16.00	z^7	+24.00	z^8	+16.00	z^9	+4.00	z^{10}	126	+84.00	z^1	+11.00	z^2	-40.00	z^3	-60.00	z^4	-40.00	z^5	-6.00	z^6	+16.00	z^7					
-40.00	z^3	-26.67	z^4	-3.49	z^5	+12.70	z^6	+19.05	z^7	+12.70	z^8	+1.90	z^9	-5.08	z^{10}	-0.32	z^3	-0.26	z^4	-0.11	z^5	-0.05	z^6	-0.07	z^7	-0.02	z^8	-0.02	z^9	-0.01	z^{10}	-0.02	z^{11}	-0.01	z^{12}
0	-33.33	z^4	-36.51	z^5	-18.70	z^6	-3.05	z^7	+11.30	z^8	+14.10	z^9	+9.08	z^{10}																					
	-33.33	z^4	-22.22	z^5	-2.91	z^6	+10.58	z^7	+15.87	z^8	+10.58	z^9	+1.59	z^{10}	-4.23	z^{11}																			
	0	-14.29	z^5	-15.79	z^6	-13.63	z^7	-4.57	z^8	+3.51	z^9	+7.49	z^{10}	+4.23	z^{11}																				
		-14.29	z^5	-9.52	z^6	-1.25	z^7	+4.54	z^8	+6.80	z^9	+4.54	z^{10}	+0.68	z^{11}	-1.81	z^{12}																		
		0	-6.26	z^6	-12.38	z^7	-9.11	z^8	-3.29	z^9	+2.96	z^{10}	+3.55	z^{11}	+1.81	z^{12}																			
			-6.26	z^6	-4.18	z^7	-0.55	z^8	+1.99	z^9	+2.98	z^{10}	+1.99	z^{11}	+0.30	z^{12}	-0.80	z^{13}																	
			0	-8.21	z^7	-8.56	z^8	-5.28	z^9	-0.03	z^{10}	+1.56	z^{11}	+1.52	z^{12}	+0.80	z^{13}																		
				-8.21	z^7	-5.47	z^8	-0.72	z^9	+2.61	z^{10}	+3.91	z^{11}	+2.61	z^{12}	+0.39	z^{13}	-1.04	z^{14}																
				0	-3.09	z^8	-4.56	z^9	-2.63	z^{10}	-2.34	z^{11}	-1.09	z^{12}	+0.40	z^{13}	+1.04	z^{14}																	
					-3.09	z^8	-2.06	z^9	-0.27	z^{10}	+0.98	z^{11}	+1.47	z^{12}	+0.98	z^{13}	+0.15	z^{14}	-0.39	z^{15}															
					0	-2.50	z^9	-2.36	z^{10}	-3.32	z^{11}	-2.56	z^{12}	-0.58	z^{13}	+0.89	z^{14}	+0.39	z^{15}																
						-2.50	z^9	-1.67	z^{10}	-0.22	z^{11}	+0.79	z^{12}	+1.19	z^{13}	+0.79	z^{14}	+0.12	z^{15}	-0.32	z^{16}														
						0	-0.69	z^{10}	-3.11	z^{11}	-3.35	z^{12}	-1.77	z^{13}	+0.10	z^{14}	+0.27	z^{15}	+0.32	z^{16}															
							-0.69	z^{10}	-0.46	z^{11}	-0.06	z^{12}	+0.22	z^{13}	+0.33	z^{14}	+0.22	z^{15}	+0.03	z^{16}	-0.09	z^{17}													
							0	-2.64	z^{11}	-3.29	z^{12}	-1.99	z^{13}	-0.23	z^{14}	+0.05	z^{15}	+0.28	z^{16}	+0.09	z^{17}														
								-2.64	z^{11}	-1.76	z^{12}	-0.23	z^{13}	+0.84	z^{14}	+1.26	z^{15}	+0.84	z^{16}	+0.13	z^{17}	-0.34	z^{18}												
								0	-1.53	z^{12}	-1.76	z^{13}	-1.07	z^{14}	-1.21	z^{15}	-0.55	z^{16}	-0.04	z^{17}	+0.34	z^{18}													
									-1.53	z^{12}	-1.02	z^{13}	-0.13	z^{14}	+0.49	z^{15}	+0.73	z^{16}	+0.49	z^{17}	+0.07	z^{18}	-0.19	z^{19}											
									0	-0.74	z^{13}	-0.94	z^{14}	-1.69	z^{15}	-1.28	z^{16}	-0.52	z^{17}	+0.26	z^{18}	+0.19	z^{19}												

И Т.Д.

4. Результирующий сигнал получим как свёртку исходного сигнала с оператором фильтра

$$s(\tilde{t}) = s(t) * h_{\Sigma}(t) \quad (4)$$

или как обратное z -преобразование произведения z -спектров сигнала и оператора фильтра:

$$\begin{aligned} \tilde{s}(t) &= Z^{-1} \tilde{S}(z) \\ \tilde{S}(z) &= S(z) \cdot H_{\Sigma}(z) \end{aligned} \quad (5)$$

Воспользуемся формулой (5):

$$\begin{aligned} H_{\Sigma}(z) &= 1 + 0.32z^3 + 0.26z^4 + 0.11z^5 + 0.05z^6 + 0.07z^7 + 0.02z^8 + 0.02z^9 + 0.01z^{10} + 0.02z^{11} + 0.01z^{12} \\ S(z) &= 4 + 8z + 4z^2 - 2z^4 - 4z^5 - 2z^6 + z^8 + 2z^9 + z^{10} \end{aligned}$$

Определим коэффициенты при степенях z результата:

z^0	$h_{\Sigma}(0) \cdot s(0)$	$1 \cdot 4$	4
z^1	$h_{\Sigma}(0) \cdot s(1)$	$1 \cdot 8$	8
z^2	$h_{\Sigma}(0) \cdot s(2)$	$1 \cdot 4$	4
z^3	$h_{\Sigma}(3) \cdot s(0)$	$0.32 \cdot 4$	1.28
z^4	$h_{\Sigma}(4) \cdot s(0) + h_{\Sigma}(3) \cdot s(1) + h_{\Sigma}(0) \cdot s(4)$	$1 \cdot (-2) + 0.32 \cdot 8 + 0.26 \cdot 4$	1.60
z^5	$h_{\Sigma}(5) \cdot s(0) + h_{\Sigma}(4) \cdot s(1) + h_{\Sigma}(3) \cdot s(2) + h_{\Sigma}(0) \cdot s(5)$	$1 \cdot (-4) + 0.32 \cdot 4 + 0.26 \cdot 8 + 0.11 \cdot 4$	-0.2
z^6			0.12
z^7			0.48
z^8			0.04
z^9			0.62
z^{10}			0.22
z^{11}			0
z^{12}			0.72
z^{13}			0.85
z^{14}			0.43
z^{15}			0.16
z^{16}			0.09
z^{17}			0.05
z^{18}			0.05
z^{19}			0.06
z^{20}			0.06
z^{21}			0.04
z^{22}			0.01

Изобразим отфильтрованный сигнал графически на фоне исходного сигнала:

