

## Лекция № 6. Анализ коэффициентов рассеивания для SH-волны. Неоднородные плоские волны. Образование головной волны. Волна Рэлея

### Анализ коэффициентов рассеивания

Основным результатом рассмотрения процессов на границе раздела для падающей SH-волны стало получение зависимостей для спектральных коэффициентов рассеивания, определяющих отношение амплитуд вторичных волн к амплитуде первичной волны:

$$\begin{cases} A = \frac{-\gamma_2 \cos \alpha_2 + \gamma_1 \cos \alpha_1}{\gamma_2 \cos \alpha_2 + \gamma_1 \cos \alpha_1} \\ B = 1 + A \end{cases} \quad (1)$$

Проанализируем полученные зависимости. Рассмотрим два случая.

Случай 1. Волна падает из среды с большей акустической жёсткостью в среду с меньшей акустической жёсткостью, т.е.  $\gamma_1 > \gamma_2$ .

Из закона Снеллиуса следует, что для подобной среды угол падения всегда больше угла прохождения:  $\alpha_1 > \alpha_2$ . Таким образом, коэффициенты рассеивания будут всегда представлять собой действительные числа, являющиеся амплитудными множителями.

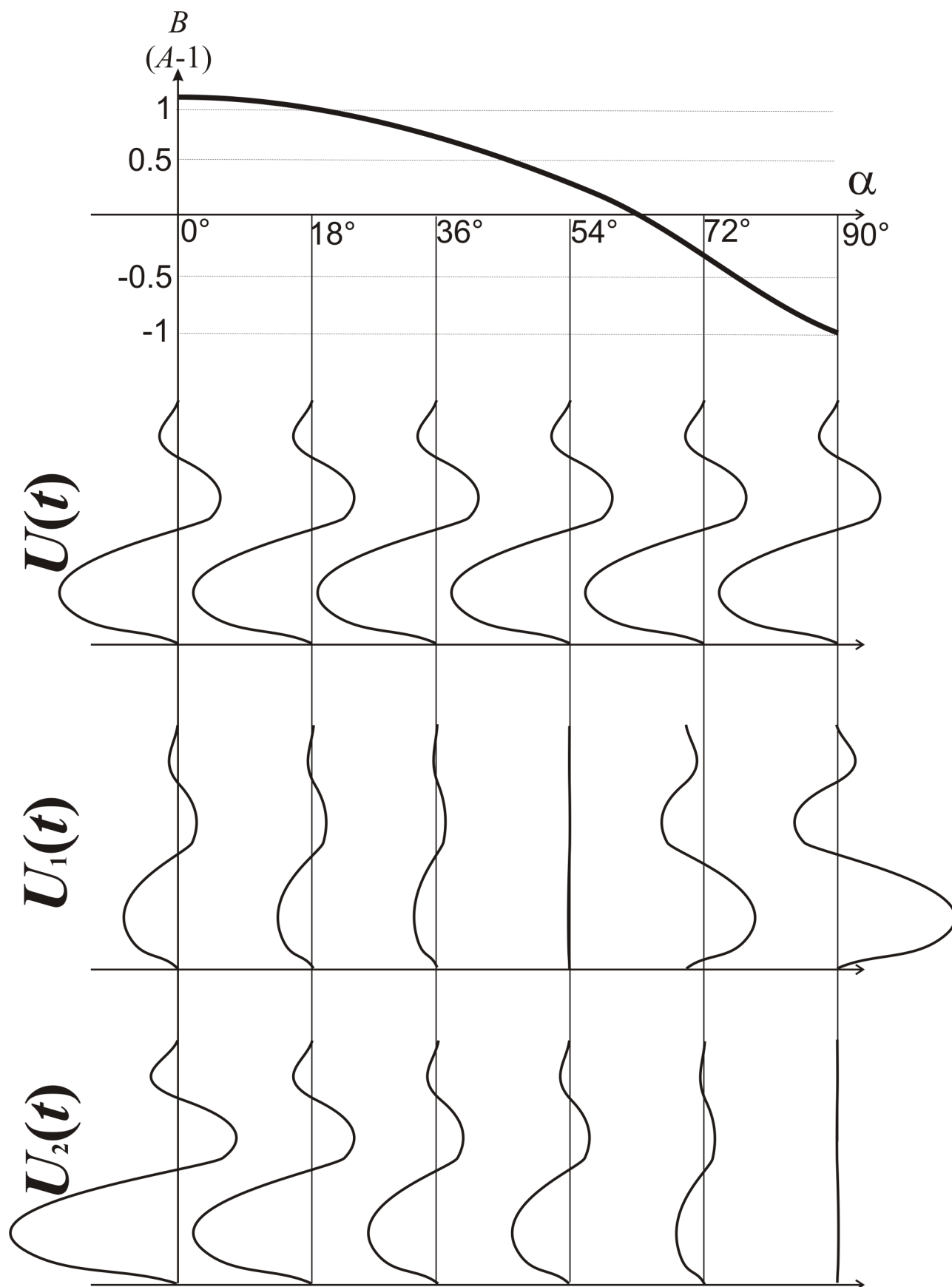
Например, зависимости  $A$  и  $B$  от угла падения для среды со следующими параметрами:

$\nu_1 = 2$ ;  $\rho_1 = 2.5$ ;  $\nu_2 = 1.5$ ;  $\rho_2 = 2$  приведены на фиг. 1. При  $\alpha_1 = 0$  :  $A = 0.25$  ;  $B = 1.25$ .

При  $\alpha_1 = 90$  :  $A = -1$  ;  $B = 0$ . При некотором промежуточном угле падения спектральный коэффициент отражения  $A = 0$ .

Угол, при котором не происходит отражения, называется *углом Брюстера*, он находится подстановкой  $A = 0$  в систему (1) :

$$\alpha_1 = \arcsin \sqrt{\frac{1 - \left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\right)^2}{1 - \left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\right)^2 \cdot \left(\frac{\nu_2}{\nu_1}\right)^2}} \quad (2)$$



Фиг 1. Спектральные коэффициенты рассеивания и формы импульсов падающей, отражённой и проходящей волн (по Л.А. Сердобольскому)

Случай 2. Волна падает из среды с меньшей акустической жёсткостью в среду с большей акустической жёсткостью, т.е.  $\gamma_1 < \gamma_2$ .

Из закона Снеллиуса следует, что для подобной среды угол падения всегда меньше угла прохождения:  $\alpha_1 < \alpha_2$ . Учитывая соотношение  $\sin \alpha_2 = \frac{v_2}{v_1} \cdot \sin \alpha_1$ , получим, что при некотором значении угла падения угол прохождения станет равен 90 градусам. Такой угол падения

называется *критическим*,  $\alpha_1 \equiv \alpha_{крит.} = \arcsin \frac{v_1}{v_2}$ . Если  $\alpha_1 > \alpha_{крит.}$ , имеем комплексное описание процессов на границе. Построим зависимости коэффициентов рассеивания.

При  $\alpha_1 = 0$  :  $A < 0$  ;  $B < 1$ . При  $\alpha_1 = \alpha_{крит.}$  :  $A = 1$  ;  $B = 2$ . Следовательно, угол Брюстера расположен до критического угла.

Исследуем, что происходит, если угол падения больше критического.

Тогда  $\sin \alpha_2 = \frac{v_2}{v_1} \cdot \sin \alpha_1 > 1$ . При этом  $\cos \alpha_2 = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha_2} = \pm j \varepsilon$ , где  $\varepsilon = \sqrt{\sin^2 \alpha_1 - 1}$ .

Косинус угла прохождения становится чисто мнимым. Определим, какой из знаков косинуса

имеет физический смысл. Проходящей волне  $U_2(x, z, t) = U_2 \left( t - \frac{x \sin \alpha_2 + z \cos \alpha_2}{v_2} \right)$  соответ-

ствует комплексный спектр  $\tilde{U}_2(x, z, j\omega) = U_2(j\omega) \cdot e^{-j \frac{\omega \cdot x \sin \alpha_2 + z \cos \alpha_2}{v_2}}$ . Подставим в выражение для спектра  $\cos \alpha_2 = \pm j \varepsilon$  :

$$\tilde{U}_2(x, z, j\omega) = U_2(j\omega) \cdot e^{-j \frac{\omega \cdot x \sin \alpha_2}{v_2}} \cdot e^{\mp j \omega \frac{z}{v_2} (j\varepsilon)} = U_2(j\omega) \cdot e^{-j \frac{\omega \cdot x \sin \alpha_2}{v_2}} \cdot e^{\frac{\pm \omega z \varepsilon}{v_2}}.$$

Получается, что зависимость от  $z$  выведена из функции запаздывания и представляет собой чисто амплитудный множитель!

Проанализируем поведение функций на бесконечности. При  $\cos \alpha_2 = +j \varepsilon$  :  $e^{\frac{\omega z \varepsilon}{v_2}} \Rightarrow \infty$ , случай нефизичен.

Следовательно,  $\cos \alpha_2 = -j \varepsilon$ , то есть  $\tilde{U}_2(x, z, j\omega) = U_2(j\omega) \cdot e^{-j \frac{\omega \cdot x \sin \alpha_2}{v_2}} \cdot e^{-\frac{\omega z \varepsilon}{v_2}}$ . Чтобы учесть гармоники с отрицательными частотами, присутствующие в комплексном частотном

спектре, введём в аргумент знаковый множитель

$$\operatorname{sgn}(\omega) = \begin{cases} 1, \omega > 0 \\ 0, \omega = 0 \\ -1, \omega < 0 \end{cases} \quad (3)$$

Окончательно запишем:  $\tilde{U}_2(x, z, j\omega) = U_2(j\omega) \cdot e^{-j \frac{\omega \cdot x \sin \alpha_2}{v_2}} \cdot e^{\frac{-\omega z \varepsilon}{v_2} \cdot \operatorname{sgn}(\omega)}$ .

В функции запаздывания (фазовом спектре) существует зависимость только от  $x$ . Это означа-

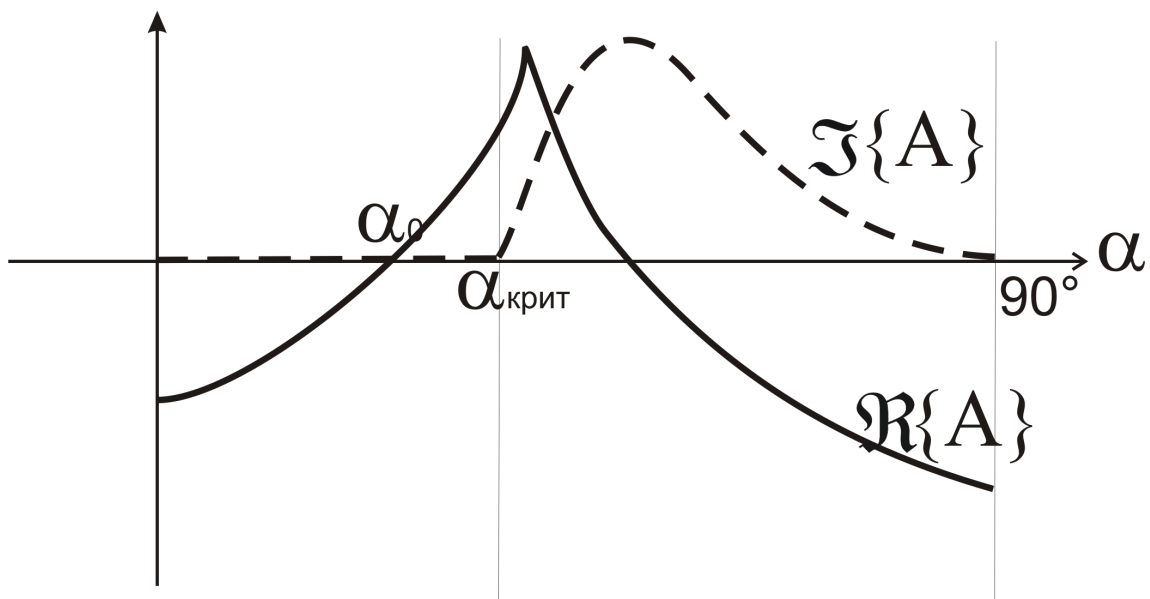
ет, что происходит скольжение волны вдоль границы раздела со скоростью  $v_2' = \frac{v_2}{\sin \alpha_2} < v_2$

с амплитудой, экспоненциально убывающей с глубиной, вдоль фронта. Волны, осуществляющие перенос подобных колебаний, получили название *неоднородных плоских волн*. Для волн данного типа справедливы следующие соотношения:

$$\begin{cases} A = \frac{\gamma_1 \cos \alpha_1 + j \varepsilon \gamma_2 \operatorname{sgn}(\omega)}{\gamma_1 \cos \alpha_1 - j \varepsilon \gamma_2 \operatorname{sgn}(\omega)} = \Re\{A\} + \Im\{A\} \\ B = \frac{2\gamma_1 \cos \alpha_1}{\gamma_1 \cos \alpha_1 - j \varepsilon \gamma_2 \operatorname{sgn}(\omega)} = \Re\{B\} + \Im\{B\} \end{cases} \quad (4)$$

где  $\Re$  и  $\Im$  означают соответственно действительную и мнимую части комплексного числа.

Зависимость коэффициентов рассеивания от угла падения приведена на фиг.2.



Фиг 2. Коэффициенты рассеивания при падении волны на кровлю высокоскоростной среды (по Л.А. Сердобольскому)

## Образование преломлённых (головных) волн

Для образования преломлённой волны необходимо выполнение следующих условий:

- волна падает на кровлю высокоскоростной среды из низкоскоростной среды
- падающая волна имеет сферический или цилиндрический фронт

Тогда при скольжении неоднородной волны по границе при  $\alpha_1 > \alpha_{\text{крит}}$  происходит отрыв фронта проходящей волны от фронта падающей волны, и этот фронт, растекаясь по границе, порождает в первой среде преломлённую (головную) волну.

Головная волна компенсирует разрыв сплошности среды и распространяется вдоль границы со скоростью, равной скорости в высокоскоростной среде.

## Волна Рэлея

Рассмотрим частный случай распространения волн у свободной (дневной) поверхности. Особенность данного случая в том, что на границе не образуются проходящие волны, а энергия падающих волн полностью возвращается в среду.

Пусть на свободную поверхность снизу падает SV-волна. Тогда при росте угла падения будет постоянно расти угол отражения обменной волны, и в определённый момент обменная SP-волна начнёт скользить вдоль границы. Помимо этого, при критическом падении по границе начинает скользить и отражённая монотипная S-волна. Вопрос заключается в том, могут ли эти волны переносить скалярный и векторный потенциалы в виде единого волнового процесса? Рэлей предположил (и доказал!), что существует волновой процесс, образованный суперпозицией указанных волн и представляющий неоднородную плоскую волну, распространяющуюся с определённой скоростью  $v_R$  и исследовал свойства этой волны.

Пусть фронт падающей влоской волны параллелен оси  $Oy$ , тогда производные по  $y$  равны 0:

$$\begin{cases} U_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{\partial \Psi_y}{\partial z} \\ U_y = \frac{\partial \Psi_x}{\partial z} - \frac{\partial \Psi_z}{\partial x} \\ U_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial \Psi_y}{\partial x} \end{cases}$$

$y$ -компонента несёт чисто поперечные смещения, следовательно, не может представлять собой смешанный волновой процесс.

Остановимся на рассмотрении компонент  $U_x$  и  $U_z$ , переносящих оба вида потенциалов смещения. Пусть  $\Psi_y = -\Psi$ .

$$\text{Тогда} \quad \begin{cases} U_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial z} \\ U_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} v_p^2 \nabla^2 \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0 \\ v_s^2 \nabla^2 \Psi - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0 \end{cases}.$$

Запишем граничные условия:

- геометрические:  $\frac{v_p}{\sin \alpha_p} = \frac{v_s}{\sin \alpha_s} = v_R$  - в предположении единого волнового процесса
- кинематические:  $U(\tau) + U_1(\tau_1) = 0$
- динамические:  $P_{xz} = P_{zz} = 0$ , т.к. граница свободная

Исследуем динамические условия.

$$P_{xz} = 2\mu e_{zx} = 2\rho v_s^2 e_{zx} = \rho v_s^2 \left( \frac{\partial U_x}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial x} \right) = \rho v_s^2 \left( 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \right) = 0$$

$$P_{zz} = \lambda \theta + 2\mu e_{zz} = \rho v_p^2 \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right) - 2\rho v_s^2 \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial z} \right) = 0$$

Ввиду неоднородного характера волны можно записать следующие выражения для потенциалов смещений (ср. выражения для закритических вторичных волн):

$$\begin{cases} \Phi = \Phi_0 e^{-az} \cdot e^{-j\omega \left( t - \frac{x}{v_R} \right)} \\ \Psi = \Psi_0 e^{-bz} \cdot e^{-j\omega \left( t - \frac{x}{v_R} \right)} \end{cases}$$

$$\text{где} \quad a = \frac{\omega}{v_p} \cdot \sqrt{\sin^2 \alpha_p - 1} \quad \text{и} \quad b = \frac{\omega}{v_s} \cdot \sqrt{\sin^2 \alpha_s - 1}.$$

Преобразуем выражения для  $a$  и  $b$ , воспользовавшись геометрическим условием:

$$a = \frac{\omega}{v_R} \cdot \sqrt{1 - (v_R/v_p)^2}; \quad b = \frac{\omega}{v_R} \cdot \sqrt{1 - (v_R/v_s)^2}$$

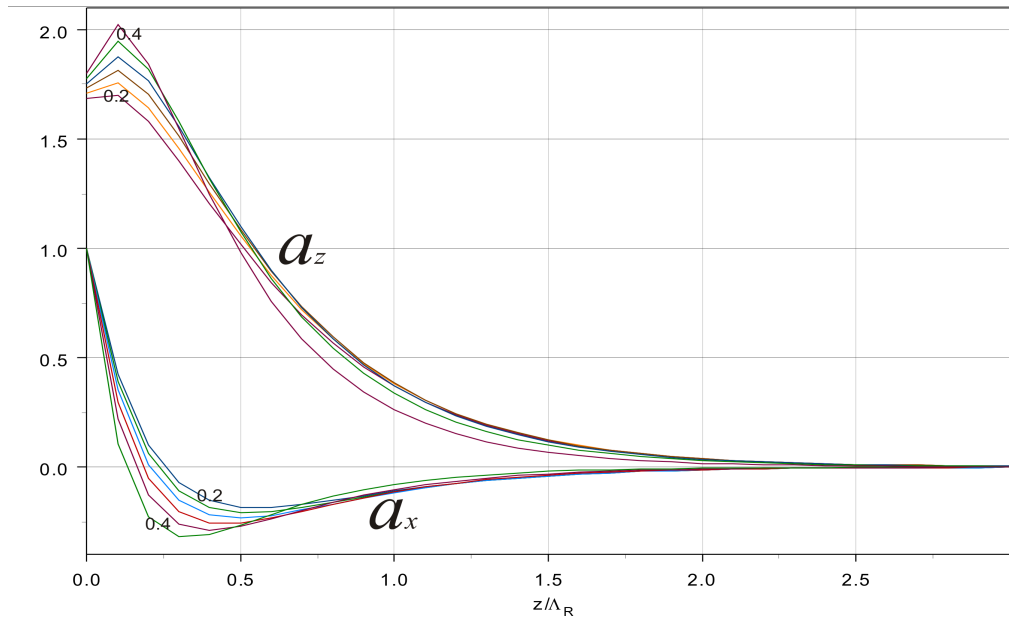
Подставляя выражения для потенциалов в формулы, определяющие характер смещений, проводя дифференцирования и используя динамические граничные условия, определим соотношение  $\frac{\Psi_0}{\Phi_0}$  :

Из условия для  $P_{zx}$ : 
$$\frac{\Psi_0}{\Phi_0} = -2j \cdot \frac{\sqrt{1-(v_R/v_p)^2}}{2-(v_R/v_s)^2}$$

Из условия для  $P_{zz}$ : 
$$\frac{\Psi_0}{\Phi_0} = \frac{2-(v_R/v_s)^2}{2j\sqrt{1-(v_R/v_s)^2}} .$$

Сравнивая полученные выражения и вводя обозначения  $\xi=(v_R/v_s)^2$  ;  $n=(v_s/v_p)^2$  , придём к уравнению вида  $\xi^3-8\xi^2+(24-16n)\xi-16(1-n)=0$  . Если среди корней этого уравнения есть действительный корень, меньший единицы (см. геометрическое условие), то существует такая скорость, при которой образуется единый волновой процесс. Анализ уравнения показывает, что такое решение существует, при этом  $\xi=(v_R/v_s)^2 \simeq 0.8-0.9$  .

Анализируя выражения для смещений, можно заключить, что смещения частиц в едином волновом процессе, образующем волну Рэлея, происходят по эллиптическим траекториям (фиг. 3), при этом амплитуда колебаний резко убывает с глубиной.



Фиг. 3. Зависимость амплитуд смещений от глубины. Параметры кривых - значения коэффициента Пуассона