

Лекция № 5. Волны на границе раздела. Падение плоской SH-волны

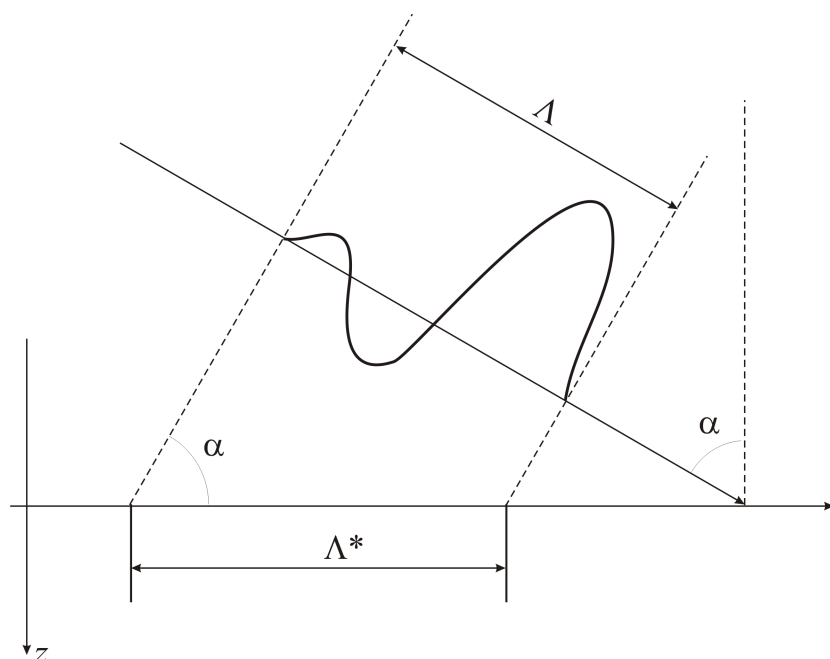
Граничные условия

Граничные условия заключаются в необходимости сохранения целостности среды: никакие упругие физические процессы на границе не в состоянии разрушить сплошность среды на ней. Давление верхнего пласта на нижний просто несопоставимо с теми силами, которые действуют в теории упругости.

Выделяют три типа граничных условий: геометрические, кинематические и динамические. Рассмотрим их последовательно.

1. Геометрические условия

Пусть на границу падает под углом α плоская волна. Это означает, что рассматривается локальная лучевая трубка — область пространства, ограниченная лучами, которые проходят через контур некоторой площадки на поверхности фронта волны. Будем считать, что сейсмическая энергия при распространении волны не выходит за пределы лучевой трубки.



Фиг 1. Падение плоской волны на границу

Тогда на границе раздела имеем кажущуюся длину волны

(фиг.1): $\Lambda^* = \frac{\Lambda}{\sin \alpha}$. Для

сохранения сплошности среды кажущаяся длина волны (т.е. проекция длины волны на направление границы раздела) должна оставаться постоянной для всех типов волн. Это означает одинаковость распределения смещений всех типов по границе раздела.

В то же время, каждая точка на

границе раздела должна иметь один и тот же период колебаний T для всех типов волн, иначе при $T_1 \neq T_2$ обязательно возникнет такой момент, когда точка будет растягиваться в противоположных направлениях, то есть возникнет разрыв.

Объединим вышеназванные — пространственное и временное — геометрические условия:

$$\frac{\Lambda^*}{T} = v^* = \frac{v}{\sin \alpha} = \text{const} \quad (1)$$

Пришли к понятию кажущейся скорости и получили *закон Снеллиуса* — закон равенства кажущихся скоростей на границе раздела сред.

2. Кинематические условия

Сущность кинематических условий заключается в том, что сумма векторов упругих смещений в верхней среде на границе равна сумме векторов упругих смещений, проходящих в нижнюю среду:

$$\sum_{(1)} \vec{U}_i \Big|_z = \sum_{(2)} \vec{U}_i \Big|_z \quad (2)$$

Положив $\vec{U}_i = U_x \cdot \vec{i} + U_y \cdot \vec{j} + U_z \cdot \vec{k}$, в проекциях на оси можно записать:

$$\begin{aligned} \sum_{(1)} U_x \Big|_z &= \sum_{(2)} U_x \Big|_z \\ \sum_{(1)} U_y \Big|_z &= \sum_{(2)} U_y \Big|_z \\ \sum_{(1)} U_z \Big|_z &= \sum_{(2)} U_z \Big|_z \end{aligned} \quad (3)$$

3. Динамические условия

Динамические граничные условия регламентируют характер напряжений на границе раздела: сумма напряжений, создаваемых падающей и отражённой волнами на границе в верхней среде, должна быть равна сумме напряжений, создаваемых в нижней среде проходящими волнами:

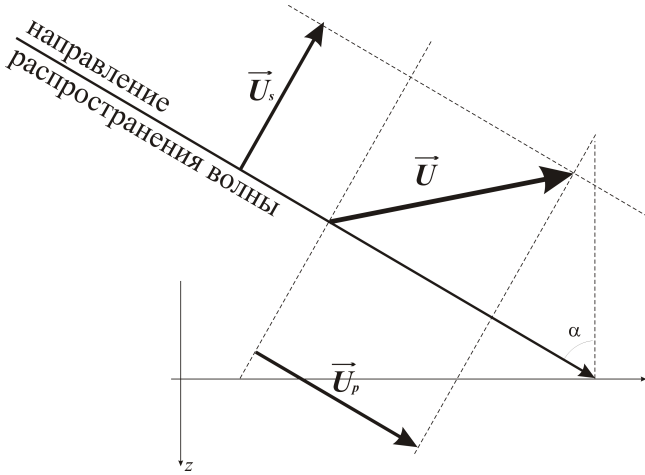
$$\sum_{(1)} \vec{P}_{z,i} \Big|_z = \sum_{(2)} \vec{P}_{z,i} \Big|_z \quad (4)$$

В проекциях:

$$\sum_{(1)} P_{zx} \Big|_z = \sum_{(2)} P_{zx} \Big|_z; \quad \sum_{(1)} P_{zy} \Big|_z = \sum_{(2)} P_{zy} \Big|_z; \quad \sum_{(1)} P_{zz} \Big|_z = \sum_{(2)} P_{zz} \Big|_z \quad (5)$$

Типы первичных и вызываемых ими вторичных волн

В общем случае вектор смещений, переносимых волной, может не совпадать с направлением распространения волны. Из теории упругости известно, что векторное поле смещений может быть разложено на безвихревую и соленоидальную компоненты, что математически выражается разложением Гельмгольца $\vec{U} = \vec{U}_p + \vec{U}_s = \text{grad } \Phi + \text{rot } \Psi$. Плоский случай подобного разложения проиллюстрирован на фиг.2.



Фиг 2. Разложение вектора смещений на продольную и поперечную компоненты

По определению,

$$\text{grad } \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \cdot \vec{k} \quad \text{и}$$

$$\begin{aligned} \text{rot } \Psi = \vec{\nabla} \times \vec{\Psi} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \Psi_x & \Psi_y & \Psi_z \end{vmatrix} = \\ &= \vec{i} \cdot \left(\frac{\partial \Psi_z}{\partial y} - \frac{\partial \Psi_y}{\partial z} \right) - \vec{j} \cdot \left(\frac{\partial \Psi_z}{\partial x} - \frac{\partial \Psi_x}{\partial z} \right) + \\ &\quad + \vec{k} \cdot \left(\frac{\partial \Psi_x}{\partial y} - \frac{\partial \Psi_y}{\partial x} \right) \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\vec{U} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi_z}{\partial y} - \frac{\partial \Psi_y}{\partial z} \right) \cdot \vec{i} + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial \Psi_x}{\partial z} - \frac{\partial \Psi_z}{\partial x} \right) \cdot \vec{j} + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial \Psi_x}{\partial y} - \frac{\partial \Psi_y}{\partial x} \right) \cdot \vec{k}$$

Пусть фронт падающей плоской волны параллелен оси Oy, тогда $\frac{\partial}{\partial y} \equiv 0$, и

$$\vec{U} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{\partial \Psi_y}{\partial z} \right) \cdot \vec{i} + \left(\frac{\partial \Psi_x}{\partial z} - \frac{\partial \Psi_z}{\partial x} \right) \cdot \vec{j} + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{\partial \Psi_y}{\partial x} \right) \cdot \vec{k}$$

В проекциях на оси:

$$\begin{cases} U_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{\partial \Psi_y}{\partial z} \\ U_y = \frac{\partial \Psi_x}{\partial z} - \frac{\partial \Psi_z}{\partial x} \\ U_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{\partial \Psi_y}{\partial x} \end{cases}$$

Отсюда следует, что компоненты U_x и U_z описывают продольные и поперечные смещения, локализованные в плоскости xOz , при этом, объединяя первое и третье уравнения последней си-

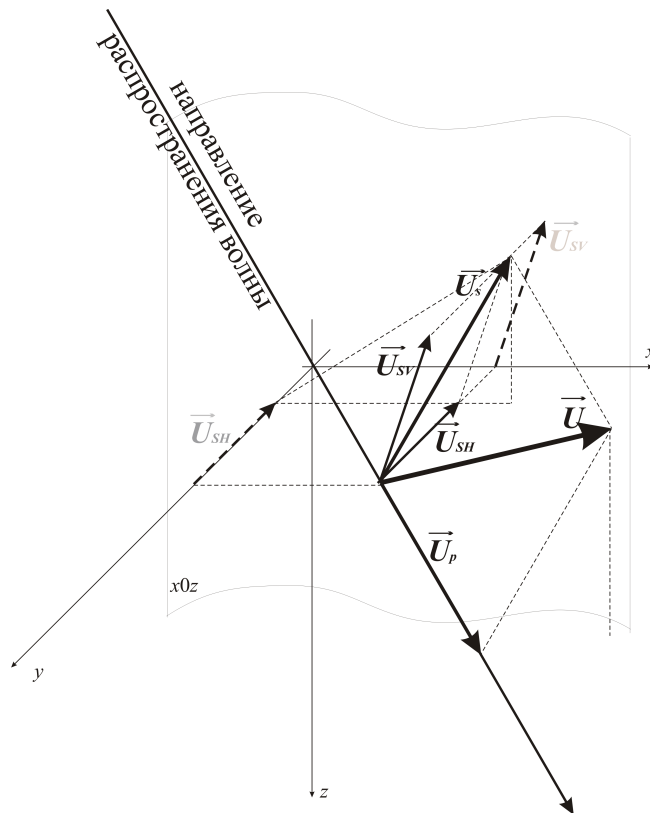
стемы, можно записать, что $\vec{U}_p = U_{px} \cdot \vec{i} + U_{pz} \cdot \vec{k}$. Волна $\vec{U}_{sv}$ называется *вертикально-поляризованной поперечной волной*.

Второе уравнение системы описывает только поперечные колебания, происходящие вдоль горизонтальной оси Oy, то есть *горизонтально-поляризованную поперечную волну*:

$$\vec{U}_{sh} = \frac{\partial \Psi_x}{\partial z} - \frac{\partial \Psi_z}{\partial x} = U_y \cdot \vec{j}.$$

Таким образом, в общем виде можно записать $\vec{U} = \vec{U}_p + \underbrace{\vec{U}_{sv} + \vec{U}_{sh}}_{\vec{U}_s}$. Вектор смещений является

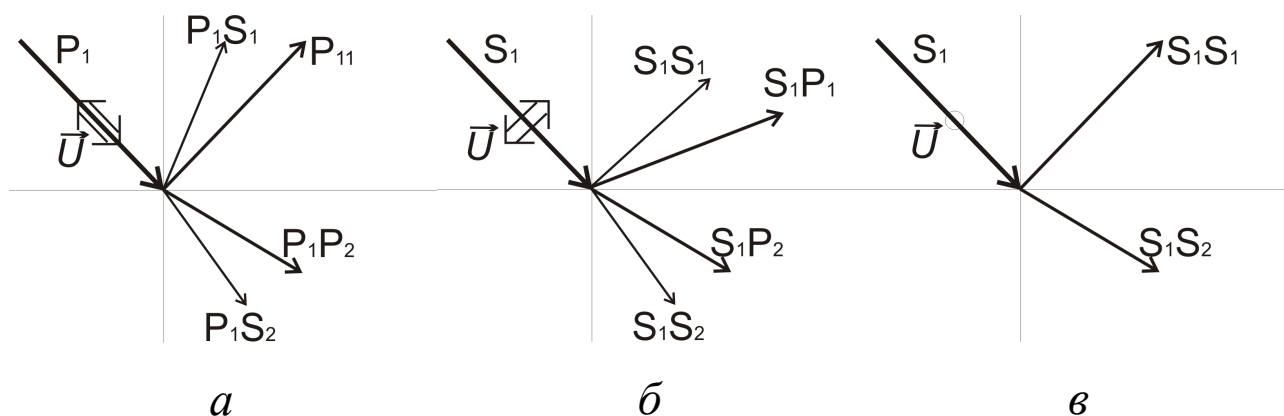
векторной суммой смещений продольных (проекция на направление распространения) и поперечных, при этом поперечные смещения можно разложить на две отдельные компоненты по направлению проецирования: при проецировании на ось Oy получаем горизонтально-поляризованную волну; при проецировании на плоскость xOz — вертикально-поляризованную волну. Сказанное иллюстрируется фиг.3



Фиг 3. Разложение вектора смещений в общем (пространственном) случае

Рассмотрим случаи падения на границу различных типов волн.

1. Пусть на границу падает плоская продольная волна. Тогда на границе вектор смещений первичной волны совпадает с лучом падающей волны и отклонён от лучей вторичных волн (фиг.4, а). При этом образуется четыре вторичных волны: две монотипных — отражённая P_{11} и проходящая P_{12} ; и две обменных — отражённая P_1S_1 и проходящая P_1S_2 .
2. Для плоской поперечной вертикально-поляризованной волны имеем аналогичную картину (фиг.4, б), так же образуется четыре вторичных волны: две монотипных — отражённая S_{11} и проходящая S_{12} ; и две обменных — отражённая S_1P_1 и проходящая S_1P_2 .
3. Для плоской поперечной горизонтально-поляризованной волны вектор смещений перпендикулярен лучу и параллелен границе, следовательно, нет явления обмена и образования вторичных обменных волн; порождаются только две монотипные волны — отражённая S_{11} и проходящая S_{12} (фиг.4, в).



Фиг 4. Типы первичных и вызываемых ими вторичных волн: (а) падение продольной волны; (б) падение SV-волны; (в) падение SH-волны. На фиг. (в) вектор смещений перпендикулярен плоскости чертежа.

Отражение и прохождение плоской SH-волны

Рассмотрение распространения SH-волны является наиболее простым с математической точки зрения, так как на границе не происходят явления обмена. Поэтому основные выводы будут приведены для SH-волны, а выражения для P- и SV-волн будут приведены без доказа-

тельства как полученные по аналогичным соображениям, что и для SH-волны.

Пусть плоская SH-волна падает на границу раздела сред под углом α , а её фронт при этом параллелен оси Oy . Тогда $\vec{U}_{SH} \equiv \vec{U} = U_y \cdot \vec{j}$ и падающая волна описывается уравнением:

$$U(x, z, t) = U \left(\underbrace{t - \frac{x \sin \alpha + z \cos \alpha}{v_1}}_{\tau} \right) \quad (6)$$

Для отражённой волны получим:

$$U_1(x, z, t) = U_1 \left(\underbrace{t - \frac{x \sin \alpha - z \cos \alpha}{v_1}}_{\tau_1} \right) \quad (7)$$

Знак «минус» перед аргументом z обусловлен движением отражённой волны в направлении, противоположном движению падающей.

Для волны, проходящей во вторую среду, можно записать:

$$U_2(x, z, t) = U_2 \left(\underbrace{t - \frac{x \sin \alpha_2 + z \cos \alpha_2}{v_2}}_{\tau_2} \right) \quad (8)$$

Сформулируем граничные условия:

- геометрические: $\frac{v_1}{\sin \alpha} = \frac{v_2}{\sin \alpha_2}$
- кинематические: $\left\{ U(\tau) + U_1(\tau_1) \right\} \Big|_z = U_2(\tau_2) \Big|_z$
- динамические: $\left\{ P_{zy} + P_{zyI} \right\} \Big|_z = P_{zy2} \Big|_z$

Преобразуем кинематическое условие. При $z = 0$ имеем:

$$U \left(t - \frac{x \sin \alpha}{v_1} \right) + U_1 \left(t - \frac{x \sin \alpha}{v_1} \right) = U_2 \left(t - \frac{x \sin \alpha_2}{v_2} \right)$$

Очевидно (из закона Снеллиуса), что $\tau = \tau_1 = \tau_2$, поэтому $U(\tau) + U_1(\tau) = U_2(\tau)$. Переходя в спектральную область при помощи комплексного преобразования Фурье, запишем:

$$\tilde{U}(j\omega) + \tilde{U}_1(j\omega) = \tilde{U}_2(j\omega) \quad (9)$$

Здесь «тильда» подчёркивает комплексный характер спектра.

Рассмотрим теперь динамическое условие $\left. (P_{zy} + P_{zyI}) \right|_z = P_{zy2} \Big|_z$.

Из закона Гука $P_{zy} = 2\mu e_{zy}$; в свою очередь, $e_{zy} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial U_z}{\partial y} + \frac{\partial U_y}{\partial z} \right)$.

Следовательно, $P_{zy} = \mu \cdot \left(\underbrace{\frac{\partial U_z}{\partial y}}_{=0, \text{ т.к. смещение от } y \text{ не зависит}} + \frac{\partial U_y}{\partial z} \right) \equiv \mu \cdot \frac{\partial U_y}{\partial z} = \rho v_1^2 \cdot \frac{\partial U_y}{\partial z}$.

Перейдём к другой переменной при дифференцировании: $\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\partial U}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial \tau}{\partial z}$.

Из (6): $\frac{\partial \tau}{\partial z} = -\frac{\cos \alpha}{v_1}$. Поэтому можно записать:

$$\begin{cases} P_{zy} = \rho v_1^2 \cdot \left(-\frac{\cos \alpha}{v_1} \right) \cdot \frac{\partial U}{\partial \tau} \\ P_{zy1} = \rho v_1^2 \cdot \left(+\frac{\cos \alpha}{v_1} \right) \cdot \frac{\partial U_1}{\partial \tau} \\ P_{zy2} = \rho v_2^2 \cdot \left(-\frac{\cos \alpha_2}{v_2} \right) \cdot \frac{\partial U_2}{\partial \tau} \end{cases}$$

Введём обозначение $\rho v = \gamma$ и перепишем динамическое граничное условие в следующем виде:

$$-\gamma_1 \cdot \cos \alpha \cdot \frac{\partial U}{\partial \tau} + \gamma_1 \cdot \cos \alpha \cdot \frac{\partial U_1}{\partial \tau} = -\gamma_2 \cdot \cos \alpha_2 \cdot \frac{\partial U_2}{\partial \tau} \quad (10)$$

При переходе в спектральную область операции дифференцирования по времени соответствует умножение на комплексную частоту: $\frac{\partial}{\partial \tau} \Leftrightarrow * j\omega$, этот множитель появится при каждом слагаемом системы (10), поэтому он сократится. В спектральном представлении:

$$-\gamma_1 \cdot \cos \alpha \cdot \tilde{U}(j\omega) + \gamma_1 \cdot \cos \alpha \cdot \tilde{U}_1(j\omega) = -\gamma_2 \cdot \cos \alpha_2 \cdot \tilde{U}_2(j\omega) \quad (11)$$

Объединяя уравнения (9) и (11), запишем систему, из которой возможно будет определить функции смещения:

$$\begin{cases} \tilde{U}(j\omega) + \tilde{U}_1(j\omega) = \tilde{U}_2(j\omega) \\ -\gamma_1 \cdot \cos \alpha \cdot \tilde{U}(j\omega) + \gamma_1 \cdot \cos \alpha \cdot \tilde{U}_1(j\omega) = -\gamma_2 \cdot \cos \alpha_2 \cdot \tilde{U}_2(j\omega) \end{cases} \quad (12)$$

Введём спектральные коэффициенты рассеивания, определяющие отношения спектров вторичных волн к спектру первичной волны:

- спектральный коэффициент отражения $A = \tilde{U}_1(j\omega) / \tilde{U}(j\omega)$

- спектральный коэффициент прохождения $A = \tilde{U}_2(j\omega) / \tilde{U}(j\omega)$

Разделим уравнения системы (12) на спектр падающей волны $\tilde{U}(j\omega)$:

$$\begin{cases} 1 + A = B \\ -\gamma_1 \cdot \cos \alpha + A \cdot \gamma_1 \cdot \cos \alpha = -B \gamma_2 \cdot \cos \alpha \end{cases} \quad (13)$$

Решая систему и обозначая для удобства $\alpha_1 = \alpha$, определим:

$$\begin{cases} A = \frac{-\gamma_2 \cos \alpha_2 + \gamma_1 \cos \alpha_1}{\gamma_2 \cos \alpha_2 + \gamma_1 \cos \alpha_1} \\ B = \frac{2 \gamma_1 \cos \alpha_1}{\gamma_2 \cos \alpha_2 + \gamma_1 \cos \alpha_1} \end{cases} \quad (14)$$