Лекция № 4. Даламберово решение волнового уравнения. Границы раздела и их типы

Решение волнового уравнения

Имеем волновое уравнение $v^2 \nabla^2 Q(x, y, z, t) - \frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} = 0$.

Рассмотрим частный случай распространения волн вниз, вдоль направления оси аппликат, то есть примем $\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial z^2}$. Тогда $v^2 \frac{\partial^2 Q}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} = 0$.

Введём новые переменные

$$\begin{cases} \xi = z + vt \\ \eta = z - vt \end{cases} \tag{1}$$

Следовательно,

$$\begin{cases} z = \dfrac{\xi + \eta}{2} \\ t = \dfrac{\xi - \eta}{2v} \end{cases} \tag{2}$$

Перейдём к новым координатам: $\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial Q}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial Q}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial z}$. Из (1) непосредственным дифференцированием находим $\frac{\partial \xi}{\partial z} = 1$; $\frac{\partial \eta}{\partial z} = 1$, получаем, что $\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial Q}{\partial \xi} + \frac{\partial Q}{\partial \eta}$.

Аналогично для производной по времени: $\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\partial Q}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial t}$. Из (1) следует, что $\frac{\partial \xi}{\partial t} = v$; $\frac{\partial \eta}{\partial t} = -v$. Окончательно получаем $\frac{\partial Q}{\partial t} = v\left(\frac{\partial Q}{\partial \xi} - \frac{\partial Q}{\partial \eta}\right)$.

Найдём теперь вторые производные:

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial Q}{\partial \xi} + \frac{\partial Q}{\partial \eta}\right) + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial Q}{\partial \xi} + \frac{\partial Q}{\partial \eta}\right) = \frac{\partial^2 Q}{\partial \xi^2} + 2 \cdot \frac{\partial^2 Q}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 Q}{\partial \eta^2}$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2}=v\cdot\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\left\{v\cdot\left(\frac{\partial Q}{\partial\xi}-\frac{\partial Q}{\partial\eta}\right)\right\}-\frac{\partial}{\partial\eta}\left\{v\cdot\left(\frac{\partial Q}{\partial\xi}-\frac{\partial Q}{\partial\eta}\right)\right\}\right]=v^2\left[\frac{\partial^2 Q}{\partial\xi^2}-2\cdot\frac{\partial^2 Q}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{\partial^2 Q}{\partial\eta^2}\right]$$

Подставляя полученный результат в волновое уравнение, найдём

$v^2\left[\frac{\partial^2 Q}{\partial\xi^2}+2\cdot\frac{\partial^2 Q}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{\partial^2 Q}{\partial\eta^2}\right]-v^2\left[\frac{\partial^2 Q}{\partial\xi^2}-2\cdot\frac{\partial^2 Q}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{\partial^2 Q}{\partial\eta^2}\right]=0$, откуда $\frac{\partial^2 Q}{\partial\xi\partial\eta}=0$, что равносильно $\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\partial Q}{\partial\xi}\right)=0$. А следовательно, Q не является функцией от η , ввиду равенства нулю производной.

Обозначим $f(\xi)=\frac{\partial Q}{\partial\xi}$. Тогда

$$Q=\int f(\xi)d\xi+C \qquad (3)$$

Можно считать, что $C=f_2(\eta)$, так как по отношению к ξ это произвольная постоянная.

Первое слагаемое в выражении (3) - некоторая произвольная функция от ξ :

$f_1(\xi)=\int f(\xi)d\xi$.

Тогда $Q=f_1(\xi)+f_2(\eta)$, или

$$Q(z,t)=f_1(z-vt)+f_2(z+vt) \qquad (4)$$

Функции f_1 и f_2 могут быть произвольными, их выбор определяется начальными и граничными условиями задачи. Определим указанные условия.

Пусть при $t = 0$ известны:

- значения самой функции $Q(z,t=0)=P(z)$
- значения первой производной функции о времени $\frac{\partial Q(z,t=0)}{\partial t}=P_1(z)$

Следовательно, $f_1(z)+f_2(z)=P(z)$

Для получения второго уравнения системы, из которой можно будет определить искомые функции, продифференцируем решение (4) по времени:

$$\frac{\partial Q}{\partial t}=-v\cdot\frac{\partial}{\partial t}f_1(z-vt)+v\cdot\frac{\partial}{\partial t}f_2(z+vt)$$

При t = 0: $\left.\dfrac{\partial Q}{\partial t}\right|_{t=0}=P_1(z)=-v\cdot\dfrac{\partial f_1(z)}{\partial t}+v\cdot\dfrac{\partial f_2(z)}{\partial t}$. Интегрируя обе части данного равенства, найдём $\int\limits_0^z P_1(z)\,dz=-v\,f_1(z)+v\,f_2(z)$. Получили систему из двух уравнений:

$$\begin{cases} f_1(z)+f_2(z)=P(z) \\ -f_1(z)+f_2(z)=\dfrac{1}{v}\cdot\int\limits_0^z P_1(z)\,dz \end{cases} \qquad (5)$$

А следовательно,

$$\begin{cases} f_1(z-vt)=\dfrac{1}{2}\cdot\left[P(z-vt)-\dfrac{1}{v}\cdot\int\limits_0^{z-vt} P_1(z)\,dz\right] \\ f_2(z+vt)=\dfrac{1}{2}\cdot\left[P(z+vt)+\dfrac{1}{v}\cdot\int\limits_0^{z+vt} P_1(z)\,dz\right] \end{cases} \qquad (6)$$

Окончательно

$$Q(z,t)=f_1(z-vt)+f_2(z+vt)=\frac{P(z-vt)+P(z+vt)}{2}+\frac{1}{2\mathrm{v}}\cdot\int\limits_{z-vt}^{z+vt} P_1(z)dz \qquad (7)$$

Наиболее важный результат этого решения — то, что переменные z и t входят в него в виде комбинации $z\mp vt$. Поскольку аргумент можно умножить на константу, его часто берут в виде $\dfrac{1}{v}(z\mp vt)=t\mp\dfrac{x}{v}$

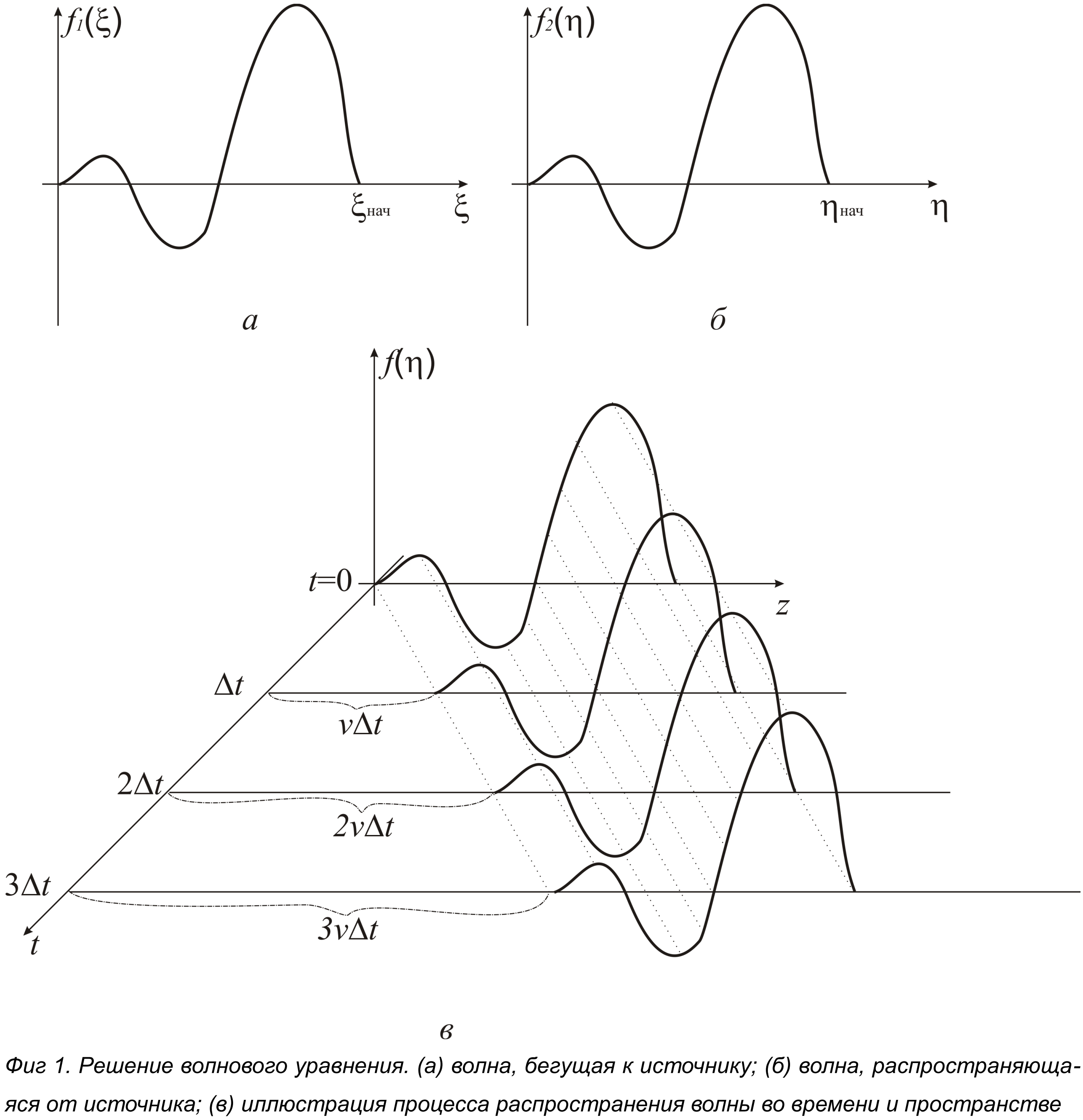
Истолкование решения волнового уравнения

Рассмотрим аргумент $\xi=z+vt$: $\xi_{нач}=z+vt$, $z_{нач}=\xi_{нач}-vt$ - фиг. 1,*а*. Получаем, что с ростом t координата z уменьшается, т.е. волна движется в направлении, противоположном положительному направлению оси 0z, от «+z» к «-z».

Рассмотрим аргумент $\eta=z-vt$: $\eta_{нач}=z-vt$, $z_{нач}=\eta_{нач}+vt$ - фиг. 1,*б*. Получаем, что с ростом t координата z увеличивается, т.е. волна движется в направлении, совпадающем с положительным направлением оси 0z, от «-z» к «+z».

Следовательно, основная форма решения волнового уравнения — это $Q(z,t)=f(z-vt)$, так как функция $f(z+vt)$ характеризует волну, бегущую обратно к источнику от границы раздела, а при постановке задачи среда была принята безграничной.

Процесс распространения волны показан на фиг. ,1*в*.



Фиг 1. Решение волнового уравнения. (а) волна, бегущая к источнику; (б) волна, распространяющаяся от источника; (в) иллюстрация процесса распространения волны во времени и пространстве

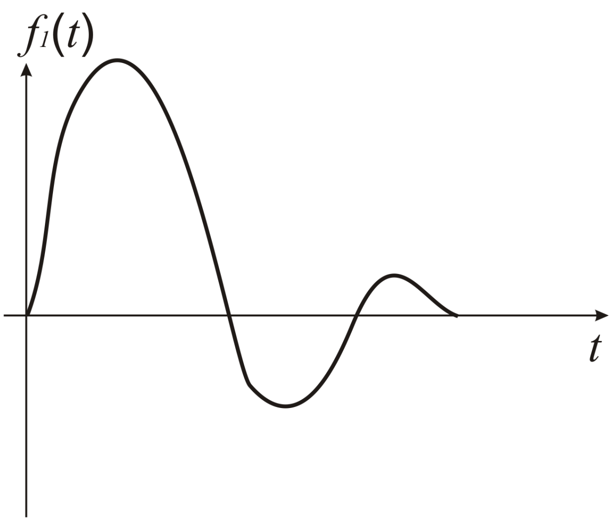
Сечение волновой поверхности линиями t = const называется *профилем волны*.

К основным параметрам, характеризующим меры упорядоченности колебаний в пространстве, а следовательно, и распространяющиеся волны, относятся:

- длина волны Λ [1]
- пространственная частота (волновое число) $\kappa = \frac{1}{\Lambda}$
- круговое волновое число $\upsilon = 2\pi\kappa$

При изменении масштаба развёртки, получающегося, например, за счёт вынесения за скобки аргумента функции множителя $-\frac{1}{v}$, решение запишется в виде $Q(z,t) = f\left[-v(t-\frac{z}{v})\right]$.

Рассмотрим новый аргумент - $f(t-\frac{z}{v})$ (фиг. 2). Подобное представление волновой функции при фиксированной пространственной координате называется *записью волны*. Как легко увидеть, запись и профиль «перевёрнуты» друг относительно друга, что объясняется умножением аргумента функции на (-1) при изменении масштаба развёртки.



Фиг 2. Запись волны

Основные характеристики колебаний во времени:

- период волны T
- частота $f = \frac{1}{T}$
- круговая частота $\omega = 2\pi f$

Для волны, распространяющейся в произвольном направлении, будет справедливо следующее решение:

$$Q(x,y,z,t) = f(t - \frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{v}) \tag{8}$$

Можно показать, что для сферической волны решение имеет вид

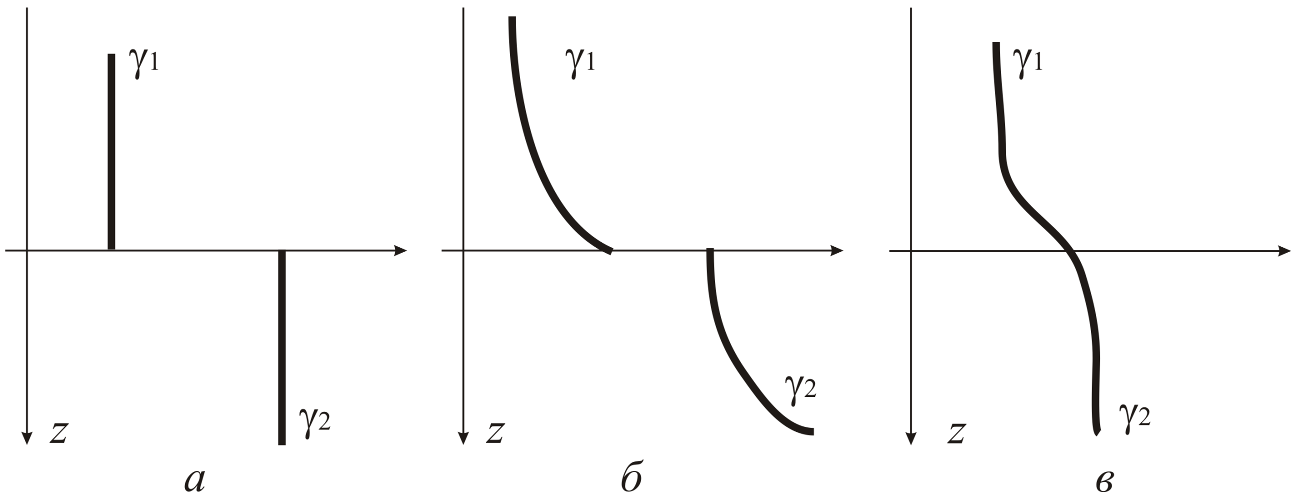
$$Q_R(x,y,z,t) = \frac{1}{R}\cdot f(t - \frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{v}) \tag{9}$$

1 В теории упругости длина волны обозначается заглавной буквой лямбда, чтобы различить длину волны и константу Ламэ. Далее, в геометрической сейсмике, для обозначения длины волны будет использована строчная лямбда.

Множитель $\frac{1}{R}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ является основным признаком сферической волны и характеризует убывает плотности энергии волны за счёт увеличения площади и объёма волнового слоя с течением времени.

Типы границ раздела

Условимся называть границей раздела сред резкое изменение акустической жёсткости $\gamma=\rho\cdot v$. В зависимости от того, равны ли значения акустических жесткостей на самой границе, выделяют два *типа* границ — разрывно-резкие и нерезкие (фиг.3).

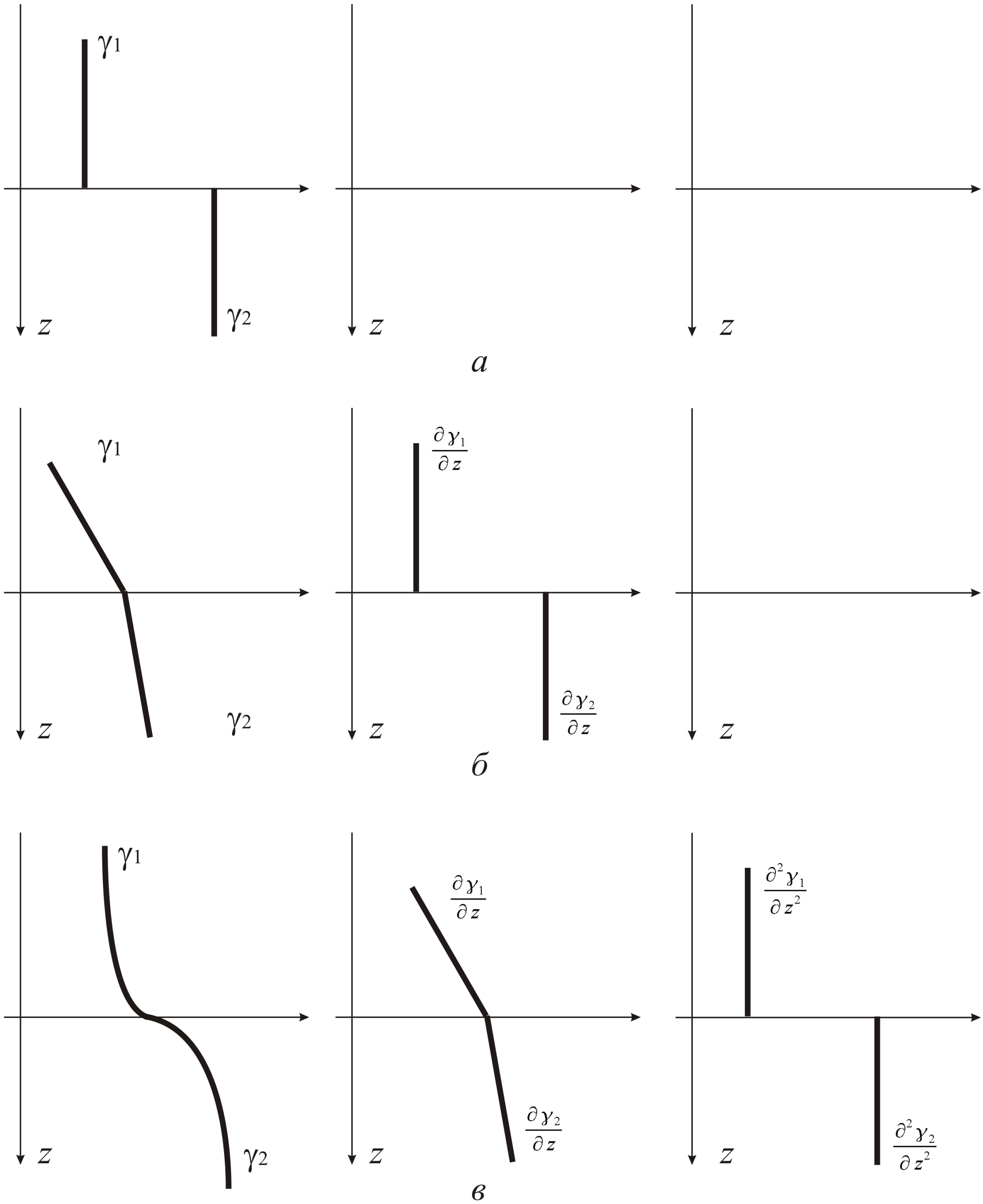


Фиг 3. Типы границ раздела. (а), (в) разрывно-резкая граница; (б) нерезкая граница.

Выделяют также *порядки* границ по характеру изменения акустической жёсткости:

- границы первого порядка соответствуют разрыву в значениях жёсткости $\gamma_1\big|_z\neq\gamma_2\big|_z$
- границы второго порядка соответствуют разрыву в значениях первой производной жёсткости по глубине $\left.\frac{\partial\gamma_1}{\partial z}\right|_z\neq\left.\frac{\partial\gamma_2}{\partial z}\right|_z$
- границы третьего порядка соответствуют разрыву в значениях второй производной жёсткости по глубине $\left.\frac{\partial^2\gamma_1}{\partial z^2}\right|_z\neq\left.\frac{\partial^2\gamma_2}{\partial z^2}\right|_z$

Сказанное иллюстрируется фиг.4.



Фиг 4. Виды границ раздела: (а) граница первого порядка; (б) граница второго порядка; (в) граница третьего порядка

Наконец, по геометрической форме (соотношению радиуса кривизны границы и длины падающей на границу волны) можно разделить границы следующим образом:

- плоские границы $R_{кр.} \gg \Lambda$
- криволинейные границы $R_{кр.} > \Lambda$
- шероховатые границы $R_{кр.} \simeq \Lambda$

В дальнейшем мы остановимся на изучении плоских разрывно-резких границ первого рода.