# Лекция № 3. Вывод волнового уравнения

## *Вывод уравнений динамического равновесия среды в смещениях*

Проведём вывод на примере первого уравнения Коши:

$$\frac{\partial P_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial P_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial P_{zx}}{\partial z}+\rho\cdot\left(F_x-\frac{\partial^2 U_x}{\partial t^2}\right)=0 \qquad (1)$$

Из закона Гука имеем:

$$\begin{gathered} P_{xx}=\lambda\theta+2\mu e_{xx} \\ P_{yx}=2\mu e_{yx} \\ P_{zx}=2\mu e_{zx} \end{gathered} \qquad (2)$$

В свою очередь,

$$\begin{aligned} e_{xx}&=\frac{\partial U_x}{\partial x} \\ e_{yx}&=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\partial U_x}{\partial y}+\frac{\partial U_y}{\partial x}\right) \\ e_{yz}&=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\partial U_x}{\partial z}+\frac{\partial U_z}{\partial x}\right) \end{aligned} \qquad (3)$$

Отсюда, подставляя (3) в (2), имеем:

$$\begin{aligned} P_{xx}&=\lambda\theta+2\mu\frac{\partial U_x}{\partial x} \\ P_{yx}&=\mu\left(\frac{\partial U_x}{\partial y}+\frac{\partial U_y}{\partial x}\right) \\ P_{yz}&=\mu\left(\frac{\partial U_x}{\partial z}+\frac{\partial U_z}{\partial x}\right) \end{aligned}$$

Подставим результат в уравнение Коши (1):

$$\lambda\frac{\partial\theta}{\partial x}+2\mu\frac{\partial^2 U_x}{\partial x^2}+\mu\left(\frac{\partial^2 U_y}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 U_x}{\partial y^2}\right)+\mu\left(\frac{\partial^2 U_z}{\partial x\partial z}+\frac{\partial^2 U_x}{\partial z^2}\right)+\rho\cdot\left(F_x-\frac{\partial^2 U_x}{\partial t^2}\right)=0$$

Перегруппируем слагаемые:

$$\lambda\frac{\partial\theta}{\partial x}+\mu\underbrace{\left(\frac{\partial^2 U_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U_x}{\partial z^2}\right)}_{\nabla^2 U_x}+\mu\left(\frac{\partial^2 U_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U_y}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 U_z}{\partial x\partial z}\right)+\rho\left(F_x-\frac{\partial^2 U_x}{\partial t^2}\right)=0$$

$$\lambda\frac{\partial\theta}{\partial x}+\mu\nabla^2 U_x+\mu\frac{\partial}{\partial x}\underbrace{\left(\frac{\partial U_x}{\partial x}+\frac{\partial U_y}{\partial y}+\frac{\partial U_z}{\partial z}\right)}_{\theta}+\rho\left(F_x-\frac{\partial^2 U_x}{\partial t^2}\right)=0 \quad .$$

И окончательно:

$$\lambda\frac{\partial\theta}{\partial x}+\mu\nabla^2 U_x+\mu\frac{\partial\theta}{\partial x}+\rho\left(F_x-\frac{\partial^2 U_x}{\partial t^2}\right)=0 \quad .$$

Получили т.н. *первое уравнение Ламэ*. По аналогии можно записать *второе* и *третье* уравнения Ламэ:

$$\lambda\frac{\partial\theta}{\partial y}+\mu\nabla^2 U_y+\mu\frac{\partial\theta}{\partial y}+\rho\left(F_y-\frac{\partial^2 U_y}{\partial t^2}\right)=0$$
$$\lambda\frac{\partial\theta}{\partial z}+\mu\nabla^2 U_z+\mu\frac{\partial\theta}{\partial z}+\rho\left(F_z-\frac{\partial^2 U_z}{\partial t^2}\right)=0$$

Перейдём к векторной форме записи путём сложения полученных уравнений, домноженных на соответствующие коэффициенты:

$$(\lambda+\mu)\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\cdot\vec{i}+\frac{\partial\theta}{\partial y}\cdot\vec{j}+\frac{\partial\theta}{\partial z}\cdot\vec{k}\right)+\mu\nabla^2\left(U_x\cdot\vec{i}+U_y\cdot\vec{j}+U_z\cdot\vec{k}\right)+$$
$$+\rho\left[\left(F_x\cdot\vec{i}+F_y\cdot\vec{j}+F_z\cdot\vec{k}\right)-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(U_x\cdot\vec{i}+U_y\cdot\vec{j}+U_z\cdot\vec{k}\right)\right]=0$$

Учтём, что $\vec{F}=F_x\cdot\vec{i}+F_y\cdot\vec{j}+F_z\cdot\vec{k}$ и $\vec{U}=U_x\cdot\vec{i}+U_y\cdot\vec{j}+U_z\cdot\vec{k}$ . Тогда:

$$(\lambda+\mu)\,\mathbf{grad}\,\theta+\mu\nabla^2\vec{U}+\rho\left[\vec{F}-\frac{\partial^2\vec{U}}{\partial t^2}\right]=0 \qquad (4)$$

Но $\theta=\mathrm{div}\,\vec{U}$ , поэтому $\mathbf{grad}\,\theta=\mathbf{grad}\,\mathrm{div}\,\vec{U}$ .

Из теории поля известно, что $\mathbf{rot}\,\mathbf{rot}\,\vec{U}=\mathbf{grad}\,\mathbf{div}\,\vec{U}-\nabla^2\vec{U}$ , следовательно,

$\nabla^2\vec{U}=\mathbf{grad}\,\mathbf{div}\,\vec{U}-\mathbf{rot}\,\mathbf{rot}\,\vec{U}$ . Подставим это выражение в формулу (4):

$$(\lambda+\mu)\,\mathbf{grad}\,\mathbf{div}\,\vec{U}+\mu\,\mathbf{grad}\,\mathbf{div}\,\vec{U}-\mu\,\mathbf{rot}\,\mathbf{rot}\,\vec{U}+\rho\left[\vec{F}-\frac{\partial^2\vec{U}}{\partial t^2}\right]=0$$

Разделив полученный результат почленно на $\rho$, окончательно получим так называемое *волновое уравнение*:

$$\frac{\lambda+2\mu}{\rho}\mathbf{grad}\,\mathbf{div}\,\vec{U}-\frac{\mu}{\rho}\mathbf{rot}\,\mathbf{rot}\,\vec{U}+\left[\vec{F}-\frac{\partial^2\vec{U}}{\partial t^2}\right]=0 \qquad (5)$$

Данное уравнение позволяет определить характер упругих смещений $\vec{U}$ во времени и в пространстве, занимаемом однородной сплошной изотропной средой с параметрами $\rho$, $\mu$, $\lambda$ в зависимости от действия массовой силы $\vec{F}$.

## Анализ волнового уравнения

Движения частиц в среде можно подразделить на два класса:

1. *вынужденные*, возникающие под действием внешней массовой силы $\vec{F}$
2. *свободные* ( $\vec{F}=0$ ).

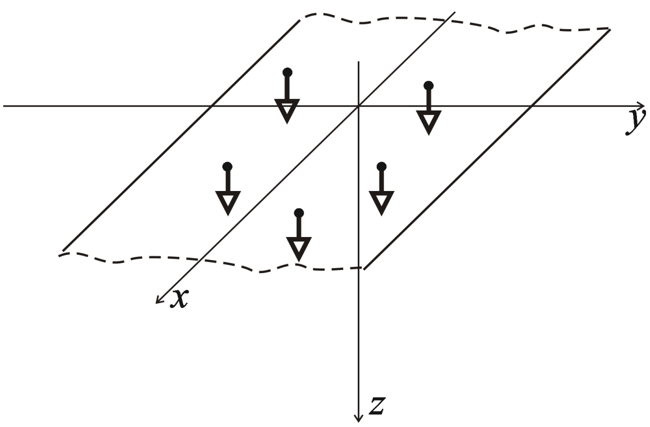
Свободные движения происходят в среде после прекращения действия вынуждающей силы, они зависят только от плотности и упругих свойств среды.

Уравнения, описывающие свободные движения, являются однородными дифференциальными уравнениями второго порядка. Обычно рассматривают именно их, а действие массовой силы в начальный момент времени закладывают в начальные условия задачи.

Пусть $\vec{F}=0$. Тогда $\frac{\lambda+2\mu}{\rho}\mathbf{grad}\,\mathbf{div}\,\vec{U}-\frac{\mu}{\rho}\mathbf{rot}\,\mathbf{rot}\,\vec{U}-\frac{\partial^2\vec{U}}{\partial t^2}=0$ .

**<u>Пример 1</u>**

Рассмотрим упругие колебания, вызываемые плоским жёстким экраном, помещённым в безграничную упругую среду и совмещённым с плоскостью $x0y$ (фиг. 1).




*Фиг 1. Колебания плоского жёсткого экрана в безграничной среде*

При достаточно резком перемещении экрана в произвольном направлении — таком, чтобы экран постоянно оставался параллельным самому себе, в среде будут распространяться колебания, компоненты которых будут зависеть только от $z$ и $t$:

$\vec{U}=\vec{U}(z,t)$.

Но тогда $\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\equiv\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ , и уравнения Ламэ примут следующий вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\mu}{\rho}\cdot\dfrac{\partial^2 U_x}{\partial z^2}-\dfrac{\partial^2 U_x}{\partial t^2}=0 \\ \dfrac{\mu}{\rho}\cdot\dfrac{\partial^2 U_y}{\partial z^2}-\dfrac{\partial^2 U_y}{\partial t^2}=0 \\ \dfrac{(\lambda+2\mu)}{\rho}\cdot\dfrac{\partial^2 U_z}{\partial z^2}-\dfrac{\partial^2 U_z}{\partial t^2}=0 \end{cases} \qquad (6)$$

Все уравнения в системе (6) однотипны, но отличаются коэффициентами при пространственных производных. Введём новые обозначения: $v_s^2=\dfrac{\mu}{\rho}$ ; $v_p^2=\dfrac{(\lambda+2\mu)}{\rho}$ . Тогда систему (6) можно переписать в виде:

$$\begin{cases} v_s^2\cdot\dfrac{\partial^2 U_x}{\partial z^2}-\dfrac{\partial^2 U_x}{\partial t^2}=0 \\ v_s^2\cdot\dfrac{\partial^2 U_y}{\partial z^2}-\dfrac{\partial^2 U_y}{\partial t^2}=0 \\ v_p^2\cdot\dfrac{\partial^2 U_z}{\partial z^2}-\dfrac{\partial^2 U_z}{\partial t^2}=0 \end{cases} \qquad (7)$$

Определим пределы изменения соотношения $v_p/v_s$ : $v_p/v_s=\sqrt{\dfrac{\lambda+2\mu}{\mu}}$ . Учитывая, что $\lambda=\dfrac{\sigma E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}$ и $\mu=\dfrac{E}{2(1+\sigma)}$ , получим $v_p/v_s=\sqrt{\dfrac{2-2\sigma}{(1-2\sigma)}}>1$ !

**<u>Пример 2</u>**

Пусть в среде распространяется только безвихревое поле, то есть $\mathbf{rot}\,\vec{U}=0$ . Тогда волновое уравнение перепишется в виде

$$\frac{\lambda+2\mu}{\rho}\mathbf{grad}\,\mathbf{div}\,\vec{U}-\frac{\partial^2\vec{U}}{\partial t^2}=0 \quad . \qquad (8)$$

Так как $\mathbf{grad}\,\mathbf{div}\,\vec{U}=\mathbf{rot}\,\mathbf{rot}\,\vec{U}+\nabla^2\vec{U}$ и $\mathbf{rot}\,\vec{U}=0$ , получим $\mathbf{grad}\,\mathbf{div}\,\vec{U}=\nabla^2\vec{U}$ . Следовательно,

$$\frac{\lambda+2\mu}{\rho}\nabla^2\vec{U}-\frac{\partial^2\vec{U}}{\partial t^2}=0 \qquad (9)$$

С другой стороны, $\mathbf{div}\,\vec{U}=\theta$ , то есть волновое уравнение (8) приобретёт вид:

$\frac{\lambda+2\mu}{\rho}\mathbf{grad}\,\theta-\frac{\partial^2\vec{U}}{\partial t^2}=0$ . Выполним над этим уравнением операцию дивергенции:

$\mathbf{div}\left\{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}\mathbf{grad}\,\theta-\frac{\partial^2\vec{U}}{\partial t^2}\right\}=0$ , или $\frac{\lambda+2\mu}{\rho}\mathbf{div}\,\mathbf{grad}\,\theta-\mathbf{div}\frac{\partial^2\vec{U}}{\partial t^2}=0$ . Меняя порядок взятия производной и операции дивергенции, запишем $\frac{\lambda+2\mu}{\rho}\mathbf{div}\,\mathbf{grad}\,\theta-\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\mathbf{div}\,\vec{U})=0$ .

Учтём, что $\mathbf{div}\,\mathbf{grad}\,\theta=\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\theta)=\nabla^2\theta$ . Окончательно запишем:

$$\frac{\lambda+2\mu}{\rho}\nabla^2\theta-\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}=0 \qquad (10)$$

Для потенциала упругих смещений можно записать: $\theta=\mathbf{div}\,\vec{U}=\mathbf{div}\,\mathbf{grad}\,\Phi=\nabla^2\Phi$ .

Подставляя в уравнение (10), получим: $\nabla^2\left(\frac{\lambda+2\mu}{\rho}\nabla^2\Phi-\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}\right)=0$ . С точностью до линейной составляющей вида $Ax+By+Cz+D$ , отражающей перемещение среды в целом и потому не представляющей интереса для нашего рассмотрения, можно заключить, что

$$\frac{\lambda+2\mu}{\rho}\nabla^2\Phi-\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}=0 \qquad (11)$$

Сравнивая уравнения (9), (10) и (11), сделаем чрезвычайно важный вывод: безвихревое поле описывается однотипными уравнениями для смещений, дилатации и потенциала:

$$v_p^2\nabla^2 Q-\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2}=0 \qquad (12)$$

Распространение таких смещений называют *продольной волной*.

**<u>Пример 3</u>**

Пусть теперь при растяжении / сжатии элементов среды не происходит изменений объёма, то есть $\mathbf{div}\,\vec{U}=0$ . Тогда волновое уравнение перепишется в виде

$$-\frac{\mu}{\rho}\mathbf{rot}\,\mathbf{rot}\,\vec{U}-\frac{\partial^2\vec{U}}{\partial t^2}=0 \quad . \qquad (13)$$

Так как $\mathbf{div}\,\vec{U}=0$ , получим $\mathbf{rot}\,\mathbf{rot}\,\vec{U}=-\nabla^2\vec{U}$ . Следовательно,

$$\frac{\mu}{\rho}\nabla^2\vec{U}-\frac{\partial^2\vec{U}}{\partial t^2}=0 \qquad (14)$$

Применим к уравнению (14) операцию ротации:

$\frac{\mu}{\rho}\mathbf{rot}\,\nabla^2\vec{U}-\mathbf{rot}\frac{\partial^2\vec{U}}{\partial t^2}=0$ . Меняя порядок взятия производной и операции ротации, запишем . $\frac{\mu}{\rho}\nabla^2\mathbf{rot}\,\vec{U}-\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\mathbf{rot}\,\vec{U})=0$ . Векторное поле, в котором дивергенция отсутствует, называется *соленоидальным.* Соленоидальное поле имеет свой вектор-потенциал: $\vec{U}=\mathbf{rot}\,\Psi$ , то есть . $\mathbf{rot}\,\vec{U}=\mathbf{rot}\,\mathbf{rot}\,\Psi=-\nabla^2\Psi$ . Тогда для вектор-потенциала упругих смещений можно записать: $\nabla^2\left(\frac{\mu}{\rho}\nabla^2\Psi-\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}\right)=0$ . С точностью до линейной составляющей вида $Ax+By+Cz+D$ , отражающей перемещение среды в целом и потому не представляющей интереса для нашего рассмотрения, можно заключить, что

$$\frac{\mu}{\rho}\nabla^2\Psi-\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}=0 \qquad (15)$$

Сравнивая уравнения (14) и (15), сделаем следующий важный вывод: соленоидальное поле упругих вращений и вектор-потенциал поля описывается однотипными уравнениями вида:

$$v_s^2\nabla^2 Q-\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2}=0 \qquad (16)$$

Распространение таких смещений называют *поперечной волной*.

## *Скорости упругих волн в горных породах*

Уравнения (12) и (16) из предыдущего параграфа содержат в своём составе константы, являющиеся связующим звеном между колебаниями во времени и пространстве и имеющими размерность скорости. Константа $v_p$ имеет смысл скорости продольных волн, а $v_s$ — скорости поперечных волн. Скорости упругих волн представляют собой один из способов записи упругих параметров среды, наряду с системами ($\sigma$, $E$) и ($\lambda$, $\mu$). Соотношения между этими системами сведены в таблицу:

| $(\lambda, \mu)$ | $(\sigma, E)$ | $(v_p, v_s)$ |
|---|---|---|
| $\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}$ | $\sqrt{\frac{E\cdot(1-\sigma)}{\rho(1+\sigma)(1-2\sigma)}}$ | $v_p$ |
| $\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$ | $\sqrt{\frac{E}{2\rho(1+\sigma)}}$ | $v_s$ |
| $\lambda$ | $\frac{\sigma E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}$ | $\rho(v_p^2-v_s^2)$ |
| $\mu$ | $\sqrt{\frac{E}{2(1+\sigma)}}$ | $\rho v_s^2$ |
| $\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$ | $\sigma$ | $\frac{v_p^2-2v_s^2}{2(v_p^2-v_s^2)}$ |
| $\frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}$ | $E$ | $\frac{\rho v_s^2(3v_p^2-4v_s^2)}{2(v_p^2-v_s^2)}$ |

Типичные значения скоростей упругих волн для некоторых горных пород (по А.К. Урупову) приведены ниже.

| **Порода** | **$v_p$,м/с** | **$v_s$,м/с** |
|---|---|---|
| Почва | 200 — 800 | 100 — 400 |
| Песок сухой | 200 — 800 | 100 — 400 |
| Песок влажный | 500 — 1800 | 100 — 500 |
| Глина | 1000 — 2800 | 200 — 1000 |
| Мел | 1700 — 4200 | 800 — 2500 |
| Доломит | 5000 — 6200 | 3000 — 3500 |
| Соль | 4000 — 5000 | 2000 — 2600 |
| Гипс | 5450 | 2800 |
| Ангидрит | 5600 | 3000 |
| Лёд | 3200 — 3600 | 1600 — 1800 |
| Вода | 1400 — 1500 | нет |
| Нефть | 1300 — 1400 | нет |
| Уголь | 1700 — 2800 | 1000 — 1500 |
| Гнейсы | 3000 — 5500 | 2000 — 3000 |
| Кварцит | 6200 | 3200 |