

Лекция № 2. Основы теории напряжений. Связь между напряжениями и деформациями

Теория напряжений описывает динамику упругих процессов, которые возникают в среде в ответ на воздействие внешних сил.

Силы в теории упругости

Сила в физике определена как векторная величина, являющаяся мерой воздействия на тело со стороны других тел или полей. Сила полностью определена, если заданы три фактора: (1) точка приложения силы; (2) направление воздействия; (3) величина силы. В зависимости от объекта, на который действуют силы, различают силы *массовые* и *поверхностные*.

Массовые силы действуют на весь объём тела, их величина пропорциональна массе:

$$\vec{F}_m = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = m \cdot \frac{d^2\vec{U}}{dt^2} = \rho \cdot V \cdot \frac{d^2\vec{U}}{dt^2}, \text{ где } m \text{ — масса; } \rho \text{ — плотность; } V \text{ — объём. То, что массо-}$$

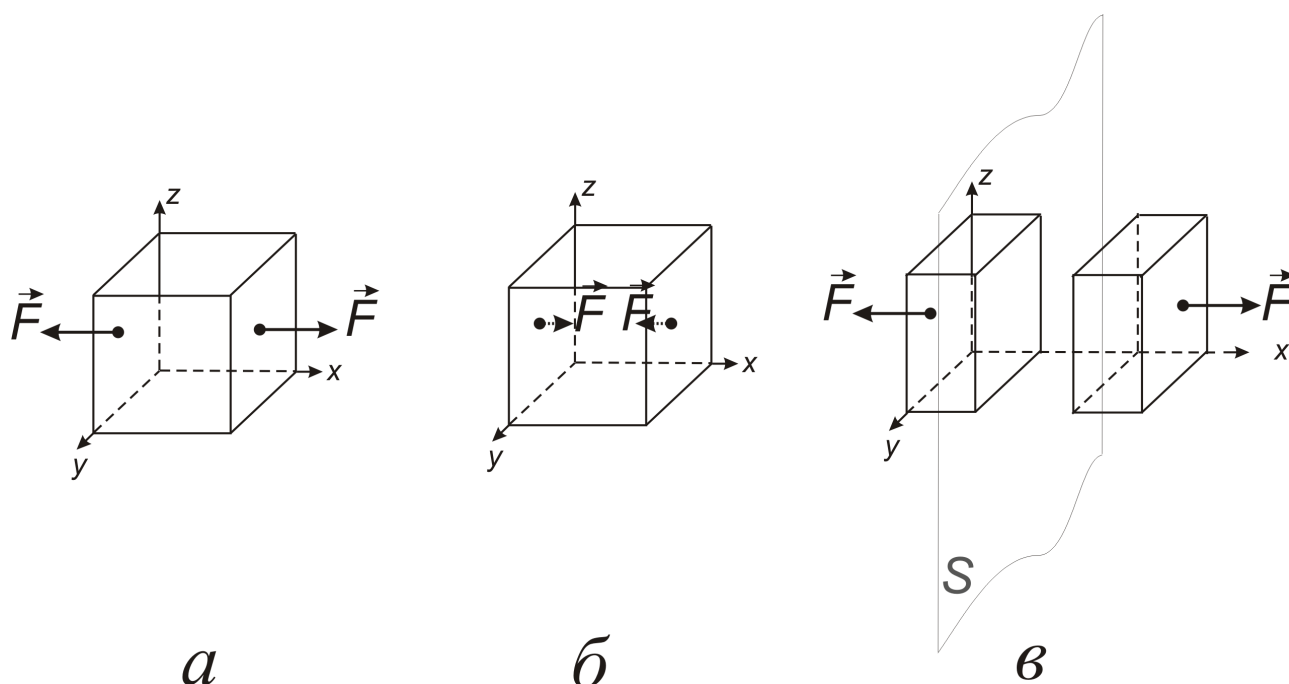
вые силы пропорциональны объёму, создаёт некоторые неудобства при анализе и сопоставлении сил, поэтому в теории упругости под массовой силой понимают величину, отнесённую к

единице массы: $\vec{F} = \frac{\vec{F}_m}{m} = \frac{d\vec{v}}{dt}$. В таком представлении сила имеет разрядность ускорения $[м/с^2]$. Примерами массовых сил могут служить силы тяжести, силы инерции.

Поверхностные силы действуют на некоторую поверхность, и их величина пропорциональна площади этой поверхности: $\vec{F}_s = s \cdot \vec{P}$. В теории упругости для удобства анализа поверх-

ностные силы относят к единице площади поверхности тела: $\vec{F}_s = \frac{\vec{F}_s}{s} = \vec{P}$, так, подобные силы будут иметь размерность давления $[Н/м^2]$.

Внутреннее давление среды, возникающее в теле в ответ на внешнее воздействие, называют *напряжением*. Для прояснения физической сущности напряжения рассмотрим прямоугольный параллелепипед, на противоположные грани которого действуют две противоположно направленные, но одинаковые по модулю силы, сжимающие или растягивающие параллелепипед (фиг.1 а, б).



Фиг 1. Иллюстрация понятия "напряжение". (а) силы, растягивающие параллелепипед; (б) силы, сжимающие параллелепипед; (в) деление параллелепипеда сечением S

Мысленно разделим тело на две половинки плоским сечением S , параллельным плоскости zOy (фиг. 1, в). Для того чтобы каждая половинка оставалась в том же напряжённом состоянии, в котором пребывало тело до его разделения, по плоскости раздела на каждой половине необходимо распределить силы, компенсирующие то воздействие одной половины на другую, которое существовало внутри тела. Эти силы-компенсаторы и будут напряжениями.

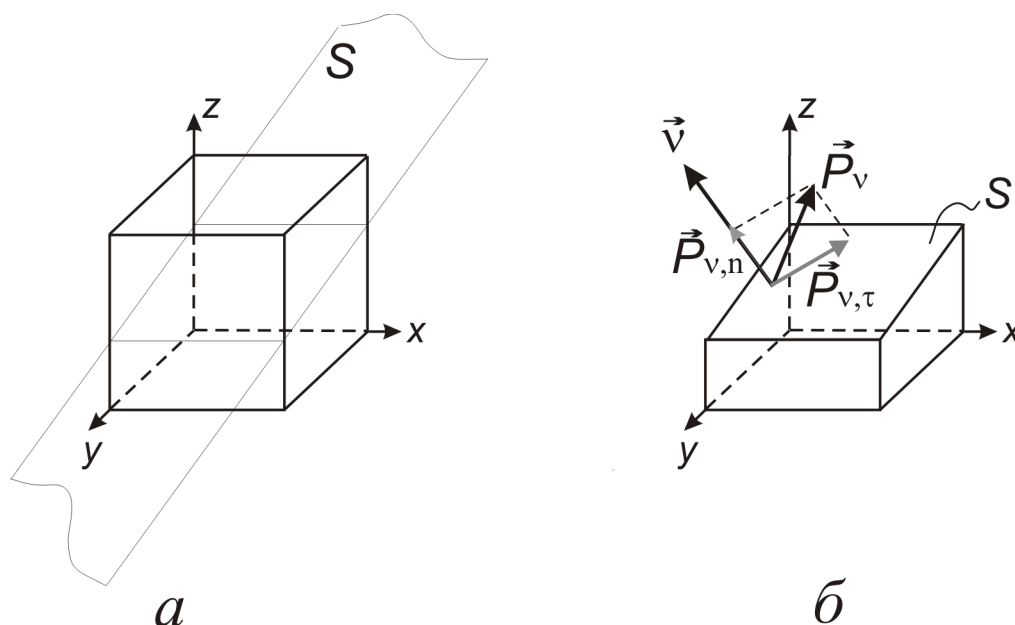
Напряжение называется нормальным, если проекция напряжения на площадку, к которой оно приложено, равна нулю.

Рассмотрим произвольное плоское сечение тела (фиг.2). В таком случае напряжение приобретает уже две компоненты — нормальную (проекция напряжения на нормаль к плоскости) и тангенциальную (проекция на плоскость).

Если менять направление сечения, то есть направление нормали к плоскости сечения, то для каждого вектора нормали $\vec{n}$ будет своё соотношение между нормальной и тангенциальной компонентами. Напряжение на площадке с нормалью $\vec{n}$ принято обозначать $\vec{P}_n$.

При непрерывном изменении ориентировки площадки в результате вращения нормали по всему телесному углу $4 \cdot \pi$ концы стрелок поверхностных сил будут образовывать вокруг исследуемой точки некоторую поверхность, которая и будет иллюстрировать напряжённое со-

стояние в этой точке. Следовательно, напряжение нельзя охарактеризовать только одной векторной величиной.

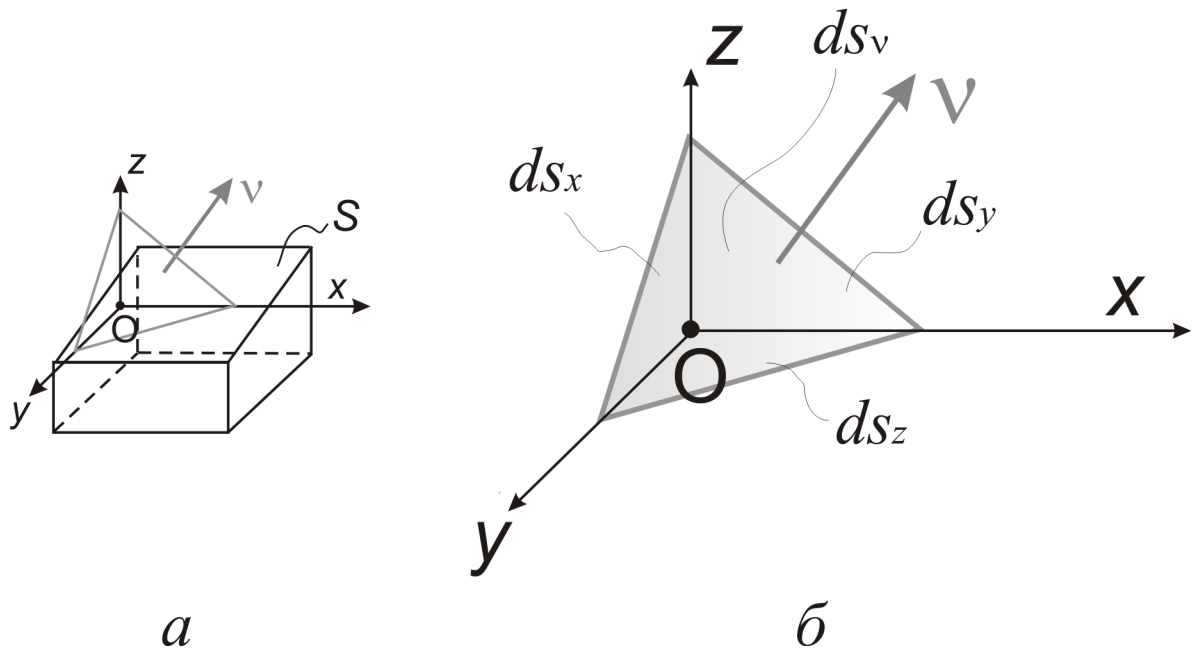


Фиг 2. Напряжения при произвольном сечении элементарного объёма: (а) сечение параллелепипеда плоскостью S; (б) напряжения на площадке с заданной нормалью

Напряжение есть бесконечное множество векторов для всех направлений нормали $\vec{n}$. Лишь при закреплении нормали $\vec{n}$ напряжение можно рассматривать как вектор и характеризовать его тремя компонентами: $\vec{P}_v = P_{v,x} \cdot \vec{i} + P_{v,y} \cdot \vec{j} + P_{v,z} \cdot \vec{k}$

Компоненты тензора напряжения

Пусть под действием внешних сил упругое тело находится в деформированном и напряжённом состоянии. Выберем произвольную точку O внутри тела и построим из неё прямоугольную систему координат. Построим также в малой окрестности точки O произвольно ориентированную плоскость с нормалью $\vec{n}$ (фиг.3, а). Вместе с координатными плоскостями плоскость $\vec{n}$ образует тетраэдр со сторонами ds_x, ds_y, ds_z, ds_v - бесконечно малыми величинами первого порядка малости. Вынесем этот тетраэдр из упругой среды (фиг.3, б). Чтобы он остался в том же напряжённом состоянии, в котором находился внутри упругого тела, на всех его четырёх гранях следует задать силы-компенсаторы $\vec{P}_x, \vec{P}_y, \vec{P}_z, \vec{P}_v$. Тогда и всё тело, и его часть — малый тетраэдр — будут находиться в одинаковом состоянии.



Фиг 3. Элементарный тетраэдр напряжений: (а) произвольное сечение тела и выбор начала координат; (б) грани тетраэдра

Заметим, что напряжённое состояние, в котором пребывает тело под воздействием внешних сил, не приводит к разрыву сплошности тела, то есть всё тело находится в состоянии динамического равновесия. Очевидно, что это же состояние сохраняется для вынесенного из тела элементарного тетраэдра в том случае, если сумма всех сил, приложенных к тетраэдру, будет равна нулю. Фактически сила инерции уравнивает все остальные силы, действующие на него. Рассмотрим подробно вид и характер сил, приложенных к тетраэдру. На каждую из граней тетраэдра действует поверхностная сила-компенсатор, то есть всего имеем четыре силы по числу граней: $\vec{P}_x$, $\vec{P}_y$, $\vec{P}_z$, $\vec{P}_v$ (помните, что силы отнесены к единице площади!); а

также массовая сила $\vec{F}$ и сила инерции $\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$, отнесённые к единице массы.

При записи уравнения динамического равновесия поверхностные силы следует умножить на площади соответствующих поверхностей, а массовые — на массу тела $dm = \rho \cdot dV$:

$$\vec{P}_v \cdot ds_v + \vec{P}_x \cdot ds_x + \vec{P}_y \cdot ds_y + \vec{P}_z \cdot ds_z + \rho \cdot \left[\vec{F} - \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \right] \cdot dV = 0 \quad (1)$$

Но грани тетраэдра, расположенные в плоскостях, образованных осями координат, являются проекциями «косой» площадки на координатные плоскости, то есть определяются умножени-

ем ds_v на косинусы углов между нормалью к плоскости и отрицательными координатными полуосями:

$$\begin{aligned} ds_x &= ds_v \cdot \cos(\widehat{\vec{v}, -\vec{x}}) \\ ds_y &= ds_v \cdot \cos(\widehat{\vec{v}, -\vec{y}}) \\ ds_z &= ds_v \cdot \cos(\widehat{\vec{v}, -\vec{z}}) \end{aligned}$$

Угол между нормалью и отрицательными полуосями тупой, следовательно,

$$\begin{aligned} \cos(\widehat{\vec{v}, -\vec{x}}) &= -\cos(\widehat{\vec{v}, \vec{x}}) = -l \\ \cos(\widehat{\vec{v}, -\vec{y}}) &= -\cos(\widehat{\vec{v}, \vec{y}}) = -m \\ \cos(\widehat{\vec{v}, -\vec{z}}) &= -\cos(\widehat{\vec{v}, \vec{z}}) = -n \end{aligned}$$

Подставляя полученные данные в (1), находим:

$$(\vec{P}_v - \vec{P}_x \cdot l - \vec{P}_y \cdot m - \vec{P}_z \cdot n) \cdot ds_v + \rho \cdot \left[\vec{F} - \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \right] \cdot dV = 0$$

Разделим данное уравнение на ds_v :

$$(\vec{P}_v - \vec{P}_x \cdot l - \vec{P}_y \cdot m - \vec{P}_z \cdot n) + \rho \cdot \left[\vec{F} - \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \right] \cdot \frac{dV}{ds_v} = 0 \quad (2)$$

Устремим объём элементарного тетраэдра к нулю. Тогда dx, dy, dz, ds_v будут являться бесконечно малыми величинами первого порядка малости; ds_x, ds_y, ds_z, ds_v - бесконечно малыми второго порядка малости; а dV — бесконечно малой третьего порядка малости. Следовательно,

но, $\frac{dV}{ds_v} \rightarrow 0$, откуда

$$\vec{P}_v = \vec{P}_x \cdot l + \vec{P}_y \cdot m + \vec{P}_z \cdot n \quad (3)$$

В проекциях на оси можно записать:

$$\begin{aligned} P_{v,x} &= P_{xx} \cdot l + P_{yx} \cdot m + P_{zx} \cdot n \\ P_{v,y} &= P_{xy} \cdot l + P_{yy} \cdot m + P_{zy} \cdot n \\ P_{v,z} &= P_{xz} \cdot l + P_{yz} \cdot m + P_{zz} \cdot n \end{aligned} \quad (4)$$

Или в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} P_{v,x} \\ P_{v,y} \\ P_{v,z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{xx} & P_{yx} & P_{zx} \\ P_{xy} & P_{yy} & P_{zy} \\ P_{xz} & P_{yz} & P_{zz} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} \quad (5)$$

Компоненты P_{ii} являются нормальными компонентами тензора; $P_{ij}|_{i \neq j}$ - тангенциальными.

Для всего объёма тела можно записать интегральные уравнения динамического равновесия, при этом нет необходимости суммировать силы, действующие на внутренних площадках тела, так как они взаимно скомпенсированы:

$$\iint_S \vec{P}_v ds + \iiint_V \rho \cdot \left(\vec{F} - \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \right) dV = 0 \quad (6)$$

В проекциях на оси получим систему из трёх уравнений:

$$\begin{cases} \iint_S P_{v,x} ds + \iiint_V \rho \cdot \left(F_x - \frac{\partial^2 U_x}{\partial t^2} \right) dV = 0 \\ \iint_S P_{v,y} ds + \iiint_V \rho \cdot \left(F_y - \frac{\partial^2 U_y}{\partial t^2} \right) dV = 0 \\ \iint_S P_{v,z} ds + \iiint_V \rho \cdot \left(F_z - \frac{\partial^2 U_z}{\partial t^2} \right) dV = 0 \end{cases} \quad (7)$$

Подставим условие (4) в уравнения (7). Получим:

$$\begin{cases} \iint_S (P_{xx} \cdot l + P_{yx} \cdot m + P_{zx} \cdot n) ds + \iiint_V \rho \cdot \left(F_x - \frac{\partial^2 U_x}{\partial t^2} \right) dV = 0 \\ \iint_S (P_{xy} \cdot l + P_{yy} \cdot m + P_{zy} \cdot n) ds + \iiint_V \rho \cdot \left(F_y - \frac{\partial^2 U_y}{\partial t^2} \right) dV = 0 \\ \iint_S (P_{xz} \cdot l + P_{yz} \cdot m + P_{zz} \cdot n) ds + \iiint_V \rho \cdot \left(F_z - \frac{\partial^2 U_z}{\partial t^2} \right) dV = 0 \end{cases} \quad (8)$$

Проведём дальнейшие преобразования на примере первого уравнения системы (8). Остальные результаты запишем по аналогии.

По формуле Остроградского-Гаусса, поток поля сквозь границу области равен интегралу дивергенции поля, то есть $\iint_S \vec{F}_s \vec{ds} = \iiint_V \text{div } \vec{F} dV$.

Преобразуя первое уравнение системы (8), находим:

$$\begin{aligned} & \iint_S (P_{xx} \cdot l + P_{yx} \cdot m + P_{zx} \cdot n) ds + \iiint_V \rho \cdot \left(F_x - \frac{\partial^2 U_x}{\partial t^2} \right) dV = \\ & = \iiint_V \left(\frac{\partial P_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial P_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial P_{zx}}{\partial z} \right) dV + \iiint_V \rho \cdot \left(F_x - \frac{\partial^2 U_x}{\partial t^2} \right) dV = \\ & = \iiint_V \left[\frac{\partial P_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial P_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial P_{zx}}{\partial z} + \rho \cdot \left(F_x - \frac{\partial^2 U_x}{\partial t^2} \right) \right] dV = 0 \end{aligned}$$

Интеграл по объёму тождественно равен нулю, если подынтегральное выражение равно нулю. Следовательно, систему (8) можно переписать, сняв знак интеграла по объёму, в виде

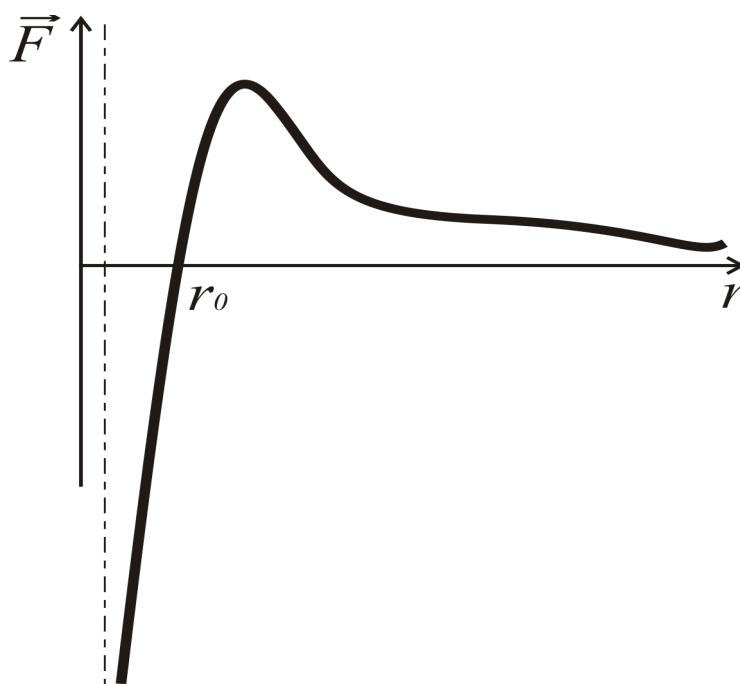
$$\begin{cases} \frac{\partial P_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial P_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial P_{zx}}{\partial z} + \rho \cdot \left(F_x - \frac{\partial^2 U_x}{\partial t^2} \right) = 0 \\ \frac{\partial P_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial P_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial P_{zy}}{\partial z} + \rho \cdot \left(F_y - \frac{\partial^2 U_y}{\partial t^2} \right) = 0 \\ \frac{\partial P_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial P_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial P_{zz}}{\partial z} + \rho \cdot \left(F_z - \frac{\partial^2 U_z}{\partial t^2} \right) = 0 \end{cases} \quad (9)$$

Эту систему уравнений называют *уравнениями Коши динамического равновесия в напряжениях*. Они связывают компоненты тензора напряжений с вызвавшими их массовыми силами и силой инерции.

Физические основы связи между напряжениями и деформациями

Причина сопротивления тел изменению их формы и размеров под действием внешних сил — это силы внутреннего взаимодействия частиц. Приложение внешних сил вызывает противодействие в теле.

При сжатии расстояние между атомами сокращается, их электронные оболочки сжимаются, сминаются, и возникают силы взаимного отталкивания, носящие квантово-механический характер. Величина сил отталкивания быстро и нелинейно увеличивается с возрастанием сил сжатия и уменьшением межчастичного расстояния. Очевидно, что сжатие имеет свой предел. При растяжении тела расстояния между атомами увеличиваются и возникают силы электростатического притяжения атомов. Вначале



Фиг 4. Зависимость сил взаимодействия частиц от межатомарного расстояния. r_0 - расстояние покоя

при увеличении растягивающего усилия силы притяжения растут, достигают максимума при некотором удалении, а затем быстро спадают до нуля, то есть происходит разрыв тела. Сказанное иллюстрируется фиг. 4.

Рассмотрим внешние силы, малые по сравнению с внутренними силами межатомных связей. Пусть в ответ на них возникают малые изменения внутренних сил Δf и межатомных расстояний Δr вокруг точки покоя r_0 . В таком случае участок кривой линии можно аппроксимировать касательной. Тогда $\Delta f = k_0 \Delta r$.

Пусть упругий стержень сечения S длиной l растягивается внешними силами $\vec{F}$. В первом приближении такой стержень можно описать как совокупность межатомных цепочек, вытянутых вдоль стержня. Если n_0 — число таких цепочек, приходящееся на единицу площади поперечного сечения, то $n_0 S$ — общее их число. Пусть все цепочки одинаковы по свойствам. Тогда внешняя сила $\vec{F}$ уравнивается взаимодействием всех цепочек:

$$\vec{F} = \sum_i \Delta \vec{f}_i = n_0 \cdot S \cdot k_0 \cdot \Delta r$$

Введём понятия нормального напряжения $\vec{P}_{\parallel} = \frac{\vec{F}}{S}$ и относительного удлинения $e_{\parallel} = \frac{\Delta r}{r_0}$.

Тогда $\frac{\vec{F}}{S} = n_0 k_0 r_0 \cdot \frac{\Delta r}{r_0}$, или $\vec{P}_{\parallel} = \underbrace{n_0 k_0 r_0}_E e_{\parallel}$.

Константа $E = n_0 k_0 r_0$ называется *модулем Юнга* и является величиной, определяемой физическими свойствами материала:

- плотностью распределения атомарных цепочек n_0 ;
- угловым коэффициентом сил притяжения k_0 ;
- межатомным расстоянием покоя r_0 .

Модуль Юнга имеет размерность напряжения, так как относительное удлинение является безразмерной величиной.

Например, если $P_{\parallel} = 2000 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$, а $E = 2 \cdot 10^6 \frac{\text{кг}}{\text{см}}$, то $e_{\parallel} = 10^{-3}$, то есть стержень длиной в 1 м растянется на 1 мм.

Следует, однако, учитывать, что при растяжении стержня ввиду увеличения межатомного расстояния уменьшается величина отталкивания атомных цепочек, то есть одновременно с

удлинением происходит уменьшение поперечных размеров стержня — возникает поперечное сжатие $e_{\perp}$. Можно считать, что поперечное сжатие пропорционально вызвавшему его продольному растяжению: $e_{\perp} \sim e_{\parallel}$. Коэффициент пропорциональности называется *коэффициентом Пуассона* и обозначается σ : $e_{\perp} = -\sigma e_{\parallel}$. Знак «минус» возникает из-за того, что растяжение противоположно сжатию.

Связь между главными напряжениями и главными деформациями

Действуют только P_1, P_2, P_3 — главные напряжения. Происходит только сжатие / удлинение — e_1, e_2, e_3 . Последовательно проанализируем напряжения и деформации, учитывая, что суммарная реакция среды есть сумма реакций на отдельные компоненты.

Напряжению P_1 соответствует растяжение вдоль оси Ox — e_{11} : $e_{11} = \frac{1}{E} \cdot P_1$, а вдоль других осей: $e_{12} = e_{13} = -\sigma \cdot e_{11} = -\frac{\sigma}{E} \cdot P_1$.

Аналогично $e_{22} = \frac{1}{E} \cdot P_2$, $e_{21} = e_{23} = -\frac{\sigma}{E} \cdot P_2$ и $e_{33} = \frac{1}{E} \cdot P_3$, $e_{31} = e_{32} = -\frac{\sigma}{E} \cdot P_3$.

При одновременном действии всех трёх напряжений получим

$$\begin{cases} e_1 = e_{11} + e_{21} + e_{31} \\ e_2 = e_{12} + e_{22} + e_{32} \\ e_3 = e_{13} + e_{23} + e_{33} \end{cases}, \text{ что равносильно } \begin{cases} e_1 = \frac{1}{E} \cdot P_1 - \frac{\sigma}{E} \cdot P_2 - \frac{\sigma}{E} \cdot P_3 \\ e_2 = \frac{-\sigma}{E} \cdot P_1 + \frac{1}{E} \cdot P_2 - \frac{\sigma}{E} \cdot P_3 \\ e_3 = \frac{-\sigma}{E} \cdot P_1 - \frac{\sigma}{E} \cdot P_2 + \frac{1}{E} \cdot P_3 \end{cases}.$$

Добавим и вычтем $\frac{\sigma}{E} \cdot P_1$ к первому уравнению, $\frac{\sigma}{E} \cdot P_2$ - ко второму; $\frac{\sigma}{E} \cdot P_3$ - к третьему.

Введём обозначение $P_1 + P_2 + P_3 = s$. В новых обозначениях

$$\begin{cases} e_1 = \frac{1+\sigma}{E} \cdot P_1 - \frac{\sigma}{E} \cdot s \\ e_2 = \frac{1+\sigma}{E} \cdot P_2 - \frac{\sigma}{E} \cdot s \\ e_3 = \frac{1+\sigma}{E} \cdot P_3 - \frac{\sigma}{E} \cdot s \end{cases} \quad (10)$$

На основе соотношения (10) постараемся получить общие соотношения между напряжениями и деформациями для произвольной системы координат.

Закон Гука для произвольной системы координат

Пусть задан некоторый вектор $\vec{U}$ в двух системах координат: (x, y, z) и (x', y', z') своими проекциями: $\{U_x; U_y; U_z\}$ и $\{U_{x'}; U_{y'}; U_{z'}\}$ соответственно. Тогда правило перехода от старой системы координат к новой определяется следующим образом:

$$\begin{cases} U_{x'} = U_x \cdot \cos(\widehat{x, x'}) + U_y \cdot \cos(\widehat{y, x'}) + U_z \cdot \cos(\widehat{z, x'}) \\ U_{y'} = U_x \cdot \cos(\widehat{x, y'}) + U_y \cdot \cos(\widehat{y, y'}) + U_z \cdot \cos(\widehat{z, y'}) \\ U_{z'} = U_x \cdot \cos(\widehat{x, z'}) + U_y \cdot \cos(\widehat{y, z'}) + U_z \cdot \cos(\widehat{z, z'}) \end{cases} \quad (11)$$

Составим таблицу направляющих косинусов новой системы координат относительно старой:

	x	y	z
x'	l_1	m_1	n_1
y'	l_2	m_2	n_2
z'	l_3	m_3	n_3

Уравнение (11) запишется в виде:

$$\begin{cases} U_{x'} = U_x \cdot l_1 + U_y \cdot m_1 + U_z \cdot n_1 \\ U_{y'} = U_x \cdot l_2 + U_y \cdot m_2 + U_z \cdot n_2 \\ U_{z'} = U_x \cdot l_3 + U_y \cdot m_3 + U_z \cdot n_3 \end{cases} \quad (12)$$

С учётом соотношения $\frac{\partial}{\partial x'} = \frac{\partial}{\partial x} \cdot l + \frac{\partial}{\partial y} \cdot m + \frac{\partial}{\partial z} \cdot n$ получим уравнения для производной в новой системе координат:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_{x'}}{\partial x'} &= \frac{\partial U_{x'}}{\partial x} \cdot l_1 + \frac{\partial U_{x'}}{\partial y} \cdot m_1 + \frac{\partial U_{x'}}{\partial z} \cdot n_1 = \frac{\partial}{\partial x} (U_x \cdot l_1 + U_y \cdot m_1 + U_z \cdot n_1) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} (U_x \cdot l_1 + U_y \cdot m_1 + U_z \cdot n_1) + \frac{\partial}{\partial z} (U_x \cdot l_1 + U_y \cdot m_1 + U_z \cdot n_1) = \\ &= \frac{\partial U_x}{\partial x} \cdot l_1^2 + \frac{\partial U_y}{\partial y} \cdot m_1^2 + \frac{\partial U_z}{\partial z} \cdot n_1^2 + \left(\frac{\partial U_y}{\partial x} + \frac{\partial U_x}{\partial y} \right) \cdot l_1 m_1 + \left(\frac{\partial U_z}{\partial x} + \frac{\partial U_x}{\partial z} \right) \cdot l_1 n_1 + \left(\frac{\partial U_y}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial y} \right) \cdot m_1 n_1 \end{aligned}$$

Для относительного удлинения вдоль оси x' имеем:

$$e_{x'x'} = \frac{\partial U_{x'}}{\partial x'} = e_{xx} l_1^2 + e_{yy} m_1^2 + e_{zz} n_1^2 + e_{xy} l_1 m_1 + e_{xz} l_1 n_1 + e_{yz} m_1 n_1$$

Аналогично вдоль других координатных осей:

$$e_{y'y'} = \frac{\partial U_{y'}}{\partial y'} = e_{xx} l_2^2 + e_{yy} m_2^2 + e_{zz} n_2^2 + e_{xy} l_2 m_2 + e_{xz} l_2 n_2 + e_{yz} m_2 n_2$$

$$e_{z'z'} = \frac{\partial U_{z'}}{\partial z'} = e_{xx} l_3^2 + e_{yy} m_3^2 + e_{zz} n_3^2 + e_{xy} l_3 m_3 + e_{xz} l_3 n_3 + e_{yz} m_3 n_3$$

В нашем случае при переходе от главной системы координат $(l, 2, 3)$ к системе (x, y, z) можно записать:

$$\begin{cases} e_{xx} = e_1 l_1^2 + e_2 m_1^2 + e_3 n_1^2 \\ e_{yy} = e_1 l_2^2 + e_2 m_2^2 + e_3 n_2^2 \\ e_{zz} = e_1 l_3^2 + e_2 m_3^2 + e_3 n_3^2 \end{cases}$$

Для сдвигов при аналогичном выводе можно получить следующие соотношения:

$$\begin{cases} e_{xy} = e_1 l_1 l_2 + e_2 m_1 m_2 + e_3 n_1 n_2 \\ e_{xz} = e_1 l_1 l_3 + e_2 m_1 m_3 + e_3 n_1 n_3 \\ e_{yz} = e_1 l_2 l_3 + e_2 m_2 m_3 + e_3 n_2 n_3 \end{cases}$$

Такие же соотношения, исходя из аналогичных соображений, получаются и для преобразования компонентов тензора напряжений:

$$\begin{cases} p_{xx} = p_1 l_1^2 + p_2 m_1^2 + p_3 n_1^2 \\ p_{yy} = p_1 l_2^2 + p_2 m_2^2 + p_3 n_2^2 \\ p_{zz} = p_1 l_3^2 + p_2 m_3^2 + p_3 n_3^2 \\ p_{xy} = p_1 l_1 l_2 + p_2 m_1 m_2 + p_3 n_1 n_2 \\ p_{xz} = p_1 l_1 l_3 + p_2 m_1 m_3 + p_3 n_1 n_3 \\ p_{yz} = p_1 l_2 l_3 + p_2 m_2 m_3 + p_3 n_2 n_3 \end{cases}$$

Учитывая равенство (10), запишем:

$$e_{xx} = l_1^2 \cdot \left(\frac{1+\sigma}{E} \cdot P_1 - \frac{\sigma}{E} s \right) + m_1^2 \cdot \left(\frac{1+\sigma}{E} \cdot P_2 - \frac{\sigma}{E} s \right) + n_1^2 \cdot \left(\frac{1+\sigma}{E} \cdot P_3 - \frac{\sigma}{E} s \right) =$$

$$= \frac{1+\sigma}{E} \cdot P_{xx} - \frac{\sigma}{E} s = \frac{1}{E} P_{xx} - \frac{\sigma}{E} P_{yy} - \frac{\sigma}{E} P_{zz}$$

По аналогии:

$$e_{yy} = \frac{1}{E} P_{yy} - \frac{\sigma}{E} P_{xx} - \frac{\sigma}{E} P_{zz}$$

$$e_{zz} = \frac{1}{E} P_{zz} - \frac{\sigma}{E} P_{xx} - \frac{\sigma}{E} P_{yy}$$

Для сдвиговых компонент получим:

$$e_{xy} = l_1 l_2 \cdot \left(\frac{1+\sigma}{E} \cdot P_1 - \frac{\sigma}{E} s \right) + m_1 m_2 \cdot \left(\frac{1+\sigma}{E} \cdot P_2 - \frac{\sigma}{E} s \right) + n_1 n_2 \cdot \left(\frac{1+\sigma}{E} \cdot P_3 - \frac{\sigma}{E} s \right) = \frac{1+\sigma}{E} \cdot P_{xy}$$

Аналогично:

$$e_{xz} = \frac{1+\sigma}{E} \cdot P_{xz}$$

$$e_{yz} = \frac{1+\sigma}{E} \cdot P_{yz}$$

Выразим напряжения через деформации:

$$\begin{cases} P_{xy} = \frac{E}{1+\sigma} e_{xy} \\ P_{xz} = \frac{E}{1+\sigma} e_{xz} \\ P_{yz} = \frac{E}{1+\sigma} e_{yz} \end{cases} \quad (13)$$

Для нормальных напряжений всё несколько сложнее. Запишем вначале в матричной форме выражения для компонент тензора деформаций через напряжения:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\sigma}{E} & -\frac{\sigma}{E} \\ -\frac{\sigma}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\sigma}{E} \\ -\frac{\sigma}{E} & -\frac{\sigma}{E} & \frac{1}{E} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} P_{xx} \\ P_{yy} \\ P_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_{xx} \\ e_{yy} \\ e_{zz} \end{pmatrix}$$

Решим данную систему методом Крамера, для чего рассчитаем главный и вспомогательные определители системы:

$$\Delta = \frac{1}{E^3} \cdot (\sigma + 1)^2 \cdot (1 - 2\sigma)$$

$$\Delta_1 = \frac{(1+\sigma)}{E^2} \cdot (\sigma\theta + (1-2\sigma)e_{xx})$$

, где θ — дилатация, относительное объёмное расширение.

Для P_{xx} получим: $P_{xx} = \frac{\sigma E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} \theta + \frac{E}{1+\sigma} e_{xx}$

Введём новые обозначения: $\lambda = \frac{\sigma E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}$ и $\mu = \frac{E}{2(1+\sigma)}$, называемые константами

Ламэ, и запишем закон Гука для произвольной системы координат:

$$\left\{ \begin{array}{l} P_{xx} = \lambda \theta + 2\mu e_{xx} \\ P_{yy} = \lambda \theta + 2\mu e_{yy} \\ P_{zz} = \lambda \theta + 2\mu e_{zz} \\ P_{xy} = 2\mu e_{xy} \\ P_{xz} = 2\mu e_{xz} \\ P_{yz} = 2\mu e_{yz} \end{array} \right. \quad (14)$$