

Лекция № 1. Основы теории деформаций

Введение

Прежде чем приступить к рассмотрению методики и технологии сейсморазведочных работ, следует понять, на чём базируется весь сейсморазведочный процесс, то есть изучить его физическую подоплёку. Теоретическим основанием сейсмики служит теория упругих волн. Именно свойство упругости горных пород, слагающих геологический разрез, позволяет получать информацию об этих породах и на основании этой информации восстанавливать геологическое строение района, где проводится регистрация. Теория упругих волн, конечно, является достаточно существенной идеализацией реального состояния вещей, тем не менее, она достаточно точно предсказывает поведение волн и позволяет дать приемлемое истолкование зарегистрированным волновым картинам. Поэтому рассмотрение сейсморазведки логично начать с вопроса, какие процессы и почему могут происходить в горных породах под действием некоторой (упругой) силы, а затем уже перейти к изучению использования в науке и практике физических свойств.

Вся теория упругости базируется на нескольких фундаментальных абстракциях, позволяющих упростить математический аппарат, используемый в описании процессов:

1. Среда полагается *идеально-упругой*. Это значит, что после прекращения внешнего воздействия на среду она довольно быстро возвращается в то состояние, в котором пребывала до начала воздействия.
2. Среда полагается *однородной*, то есть её свойства одинаковыми в каждой точке среды.
3. Среда полагается *изотропной*, то есть её свойства постоянными во всех направлениях.
4. Среда полагается *сплошной*, фактически игнорируется поровое пространство и возможные флюиды-порозаполнители. Это предположение известно также под названием «*гипотеза сплошности*».

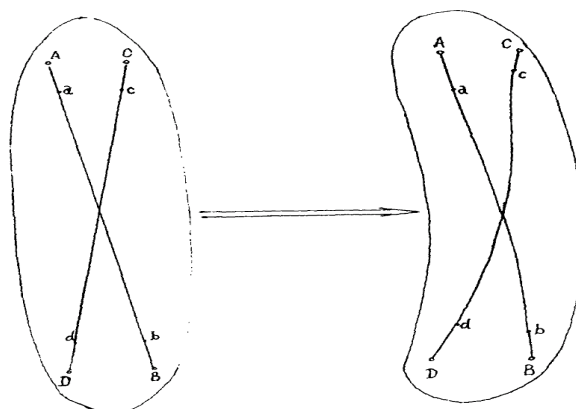
Пусть на некоторое тело (или геологическую среду) начинают действовать некоторые внешние силы. Посмотрим, какие изменения формы и размеров могут происходить с телом.

Кинематика упругих процессов в идеально-упругой среде, виды упругих смещений вкупе с вызванными ими изменениями формы и размеров элементов среды изучаются в *теории деформаций*.

Компоненты малой деформации

Прежде всего, необходимо отметить, что если рассматривать весь объём тела, то есть его *интегральные характеристики*, то описать математически все возможные вариации размеров и формы было бы невозможно, так как искомое тело обладает числом степеней свободы, схожим по порядку с общим числом частиц, составляющих его. Но если перейти к рассмотрению дифференциально ма-

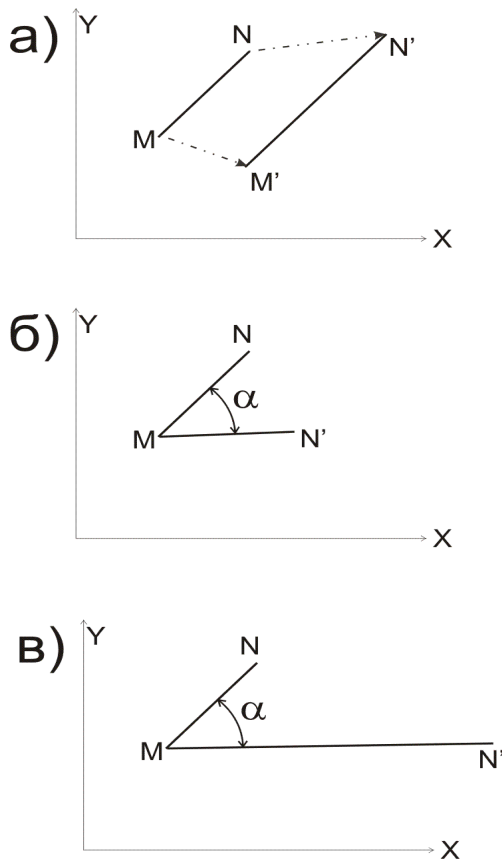
лых объёмов тела, то число возможных изменений резко сокращается. Рассмотрим тело эллипсоидальной формы и мысленно поместим в него два пересекающихся прямолинейных стержня АВ и CD (фиг.1). Будем считать дифференциально малым такой отрезок стержня, который в результате происходящей упругой деформации можно считать остающимся прямолинейным, на фиг. 1 это малые отрезки Аа, Вb, Сс и Dd.



Фиг 1. Упругая среда эллипсоидной формы с помещёнными вовнутрь прямолинейными стержнями (по Л.А. Сердобольскому)

Что может произойти с отрезком прямой линии с тем условием, чтобы после происшедшего события этот отрезок остался бы прямым? Всего три вещи: удлинение (или сжатие), поворот на некоторый угол или и удлинение и поворот вместе. Сказанное иллюстрируется на фиг.2. Конечно, единственный малый отрезок рассматривать нельзя — ведь тогда будет невозможно отличить деформацию тела от его перемещения. Поэтому в обязательном порядке изучается поведение двух связанных между собой отрезков, а по изменению их взаимного расположения до начала и в процессе воздействия внешней силы делается заключение о характере происшедшей деформации. Важным свойством подобного упрощения является то, что рассматриваемая деформация оказывается *плоской*, поскольку два пересекающихся отрезка всегда описывают плоскость.

Проведём математическое описание процесса деформации. Для этого вначале рассмотрим две дифференциально близкие точки среды — M и N , - образующие отрезок MN . Пусть точка M имеет координаты $\{x, y, z\}$, а точка N — $\{x + dx, y + dy, z + dz\}$, где dx, dy, dz — бесконечно малые величины одного и того же (например, первого) порядка малости.



Фиг 2. Возможные деформации прямолинейного отрезка. а) удлинение; б) поворот; в) удлинение и поворот

Пусть под действием внешних сил отрезок MN переходит в некоторый отрезок $M'N'$, при этом смещения каждой точки будут описываться соответствующими векторами: $\vec{U}_M = \vec{MM'}$ для точки M и $\vec{U}_N = \vec{NN'}$ для точки N .

Дифференциальная близость рассматриваемых точек позволяет выразить один вектор смещения через другой, используя формулы приближённого вычисления функций через разложение в ряд Тейлора.

Стандартная формула разложения в ряд Тейлора для функции одной переменной имеет вид:

$$f(x+dx) = f(x) + \frac{1}{1!} \cdot \frac{df}{dx} \cdot dx + \frac{1}{2!} \cdot \frac{d^2 f}{dx^2} \cdot dx^2 + \dots \quad (1)$$

где $f(x)$ — значение функции в некоторой точке тела; $f(x+dx)$ — значение функции в дифференциально близкой точке тела.

Если не фиксировать положение отрезка MN в пространстве специальным образом, то функция смещений будет функцией трёх аргументов — трёх пространственных координат, а в разложении в ряд Тейлора будут присутствовать производные по всем аргументам:

$$\begin{aligned} f(x+dx, y+dy, z+dz) = & f(x, y, z) + \frac{1}{1!} \cdot \left[\frac{\partial f}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot dz \right] + \\ & + \frac{1}{2!} \cdot \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot dx^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cdot dy^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \cdot dz^2 + \right. \\ & \left. + 2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cdot dx dy + 2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \cdot dx dz + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \cdot dy dz \right] + \dots \end{aligned} \quad (2)$$

В формуле выше присутствуют три частных производные первого порядка, шесть частных производных второго порядка (с учётом независимости смешанных производных от порядка дифференцирования), десять производных третьего порядка и т.п. Обратите внимание, что

при каждой производной существует множитель вида $d\xi^n$ (ξ - произвольная координата: x , y или z), где n — порядок производной. Величина $d\xi^n$ будет величиной n -ного порядка малости по отношению к $d\xi$. Условимся пренебрегать величинами большего порядка малости по отношению к длине отрезка. Тогда формула (2) преобразуется к виду:

$$f(x+dx, y+dy, z+dz) = f(x, y, z) + \left[\frac{\partial f}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot dz \right] \quad (3)$$

Выразим теперь вектор смещений $\vec{U}_N$ для точки N через вектор смещений $\vec{U}_M$ для точки M :

$$\vec{U}_N = \vec{U}_M + \frac{\partial \vec{U}_M}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial \vec{U}_M}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial \vec{U}_M}{\partial z} \cdot dz \quad (4)$$

Найдём вектор разности смещений $\Delta \vec{U} = \vec{U}_N - \vec{U}_M$:

$$\Delta \vec{U} = \frac{\partial \vec{U}_M}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial \vec{U}_M}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial \vec{U}_M}{\partial z} \cdot dz \quad (5)$$

В дальнейшем при записи будем опускать индекс M вектора, считая, что всегда описываются смещения в дифференциально малой окрестности заданной точки. В проекциях на оси декартовой системы координат, учитывая, что $\vec{U} = U_x \cdot \vec{i} + U_y \cdot \vec{j} + U_z \cdot \vec{k}$, можно записать:

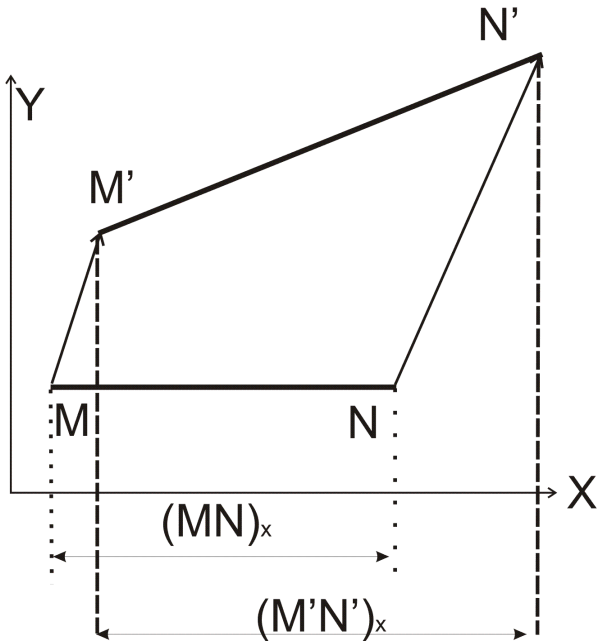
$$\begin{cases} \Delta U_x = \frac{\partial U_x}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial U_x}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial U_x}{\partial z} \cdot dz \\ \Delta U_y = \frac{\partial U_y}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial U_y}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial U_y}{\partial z} \cdot dz \\ \Delta U_z = \frac{\partial U_z}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial U_z}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial U_z}{\partial z} \cdot dz \end{cases} \quad (6)$$

Получили представление вектора смещений как линейной функции координат элементарного отрезка MN . Малая деформация, описываемая уравнением типа (6), называется *линейной*.

Теперь установим связь компонент вектора смещений в проекциях на оси координат с видами малых изменений отрезков, представленных на фиг. 2. Упростим рассмотрение, полагая, что до деформации малый отрезок MN расположен в плоскости xOy ; более того, будем считать MN параллельным оси Ox . Тогда длины отрезка MN в проекциях на оси будут задаться следующим образом: $dx \neq 0; dy = 0; dz = 0$. В результате деформации отрезок MN перейдёт в некоторый отрезок $M'N'$, также по условию рассмотрения расположенный в плоскости xOy (фиг. 3). Тогда для компонент вектора смещений из формулы (6) останутся только следую-

щие составляющие:

$$\begin{cases} \Delta U_x = \frac{\partial U_x}{\partial x} \cdot dx \\ \Delta U_y = \frac{\partial U_y}{\partial x} \cdot dx \\ \Delta U_z = \frac{\partial U_z}{\partial x} \cdot dx \end{cases}$$



Фиг. 3. Малый отрезок до и после деформации

Вычислим *относительное удлинение* отрезка MN вдоль оси $0x$ как отношение разности проекции отрезка $M'N'$ и отрезка MN к длине

$$\text{исходного отрезка } MN: e_{xx} = \frac{(M'N')_x - MN}{MN}.$$

Длина отрезка MN равна dx . Исходя из фиг. 3, длина отрезка $M'N'$ составляет $dx + |\Delta \vec{U}|$, в проекции на ось $0x$ - $dx + \Delta U_x$. Тогда

$$e_{xx} = \frac{(M'N')_x - MN}{MN} = \frac{dx + \frac{\partial U_x}{\partial x} \cdot dx - dx}{dx} = \frac{\partial U_x}{\partial x} \quad (7)$$

Изменяя условия эксперимента, то есть последовательно ориентируя малый отрезок MN в плоскости $x0y$ параллельно оси $0y$; в плоскости $x0z$ параллельно оси $0z$, можно записать аналогичные выражения для относительных удлинений вдоль соответствующих осей:

$$e_{yy} = \frac{\partial U_y}{\partial y} \quad \text{и} \quad e_{zz} = \frac{\partial U_z}{\partial z}. \quad \text{Таким образом, одноимённые компоненты вектора смещений (6)}$$

имеют смысл относительных удлинений вдоль координатных осей.

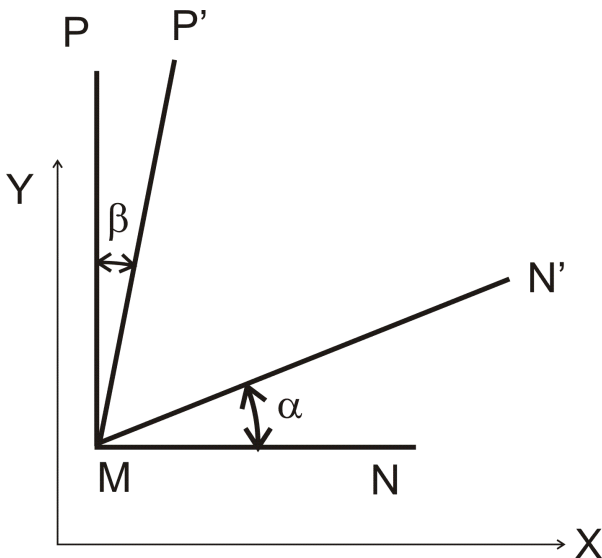
Как следует из фиг. 3, деформация не ограничивается только удлинениями вдоль координатных осей. Одновременно произошёл поворот отрезка относительно точки M — вокруг оси $0z$, перпендикулярной плоскости рисунка — на некоторый угол α . Если считать угол поворота малым, то его значение можно оценить при помощи тангенса угла, так как величины α и $\tan \alpha$ являются эквивалентными бесконечно малыми:

$$\alpha \approx \tan \alpha = \frac{(M'N')_y}{(M'N')_x} = \frac{\Delta U_y}{dx + \Delta U_x} = \frac{\frac{\partial U_y}{\partial x} \cdot dx}{\frac{\partial U_x}{\partial x} \cdot dx + dx} \quad (8)$$

Рассмотрим знаменатель полученного выражения: первое слагаемое представляет собой произведение относительного удлинения e_{xx} вдоль оси $0x$ на длину отрезка dx — оба сомножителя есть величины одинакового порядка малости, следовательно, их произведение будет величиной большего порядка малости по сравнению с каждой из них, в частности: $e_{xx} \cdot dx \ll dx$. Фактически мы установили, что второе слагаемое много больше первого, то

есть в первом приближении слагаемым $e_{xx} \cdot dx$ можно пренебречь. Тогда получим $\alpha \approx \frac{\partial U_y}{\partial x}$

Вместе с тем следует отличать вращение отрезка, вызванное деформацией, от общего малого вращения плоскости в результате перемещения тела. Для разделения этих двух видов реакции среды на внешнее воздействие будем рассматривать два перпендикулярных друг другу (до деформации) отрезка: MN и MP (фиг. 4). Изменение формы фигуры, вызванное скошением углов в результате вращения плоскости будем называть *сдвиговой деформацией*, а общий поворот тела в плоскости — *поворотом*. Следует учесть, что поворот не является деформацией, т.к. не сопровождается изменениями формы и/или размеров тела.



Фиг. 4. Сдвиговая деформация и поворот

Будем считать точку P дифференциально близкой к точке M . Если угол PMN до деформации прямой, то отрезок MP в условиях рассматриваемого эксперимента будет параллелен оси $0y$, то есть для него $dx=0; dy \neq 0; dz=0$. Запишем компоненты вектора смещений для отрезка MP :

$$\begin{cases} \Delta U_x = \frac{\partial U_x}{\partial y} \cdot dy \\ \Delta U_y = \frac{\partial U_y}{\partial y} \cdot dy \\ \Delta U_z = \frac{\partial U_z}{\partial y} \cdot dy \end{cases}$$

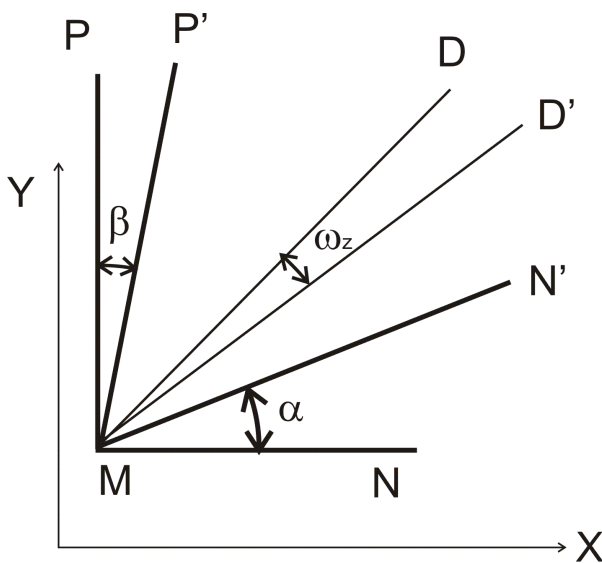
Вычислим угол β поворота отрезка MP , исходя из тех же соображений, что были использо-

ваны для определения угла α :

$$\beta \simeq \tan \beta = \frac{(M'P')_x}{(M'P')_y} = \frac{\Delta U_x}{dy + \Delta U_y} = \frac{\frac{\partial U_x}{\partial y} \cdot dy}{\frac{\partial U_y}{\partial y} \cdot dy + dy} = \frac{\partial U_x}{\partial y} \quad (9)$$

Полусумма углов α и β является мерой скошения прямого угла PMN и называется сдвиговой деформацией в плоскости xOy и обозначается e_{xy} :

$$e_{xy} = \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial U_y}{\partial x} + \frac{\partial U_x}{\partial y} \right) \quad (10)$$



Фиг 5. Определение величины поворота

По аналогии для сдвигов в плоскости zOx и yOz соответственно получим:

$$e_{zx} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial U_z}{\partial x} + \frac{\partial U_x}{\partial z} \right)$$

$$e_{yz} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial U_y}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial y} \right)$$

В отсутствие скошения поворот вокруг оси Oz определим по изменению положения диагонали угла PMN в результате деформации (исходная градусная мера угла $\frac{\pi}{4}$). Предположим, что $\alpha > \beta$. Соответствующее изображение приведено на фиг.

5, из геометрических соображений можно заключить следующее:

$$\angle PMN = \frac{\pi}{2}$$

$$\angle P'MN' < \frac{\pi}{2}$$

$$\angle P'MN' = \frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)$$

$$\angle D'MN' = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta) \right] = \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha + \beta}{2}$$

Рассчитаем отклонение от горизонтали:

$$\angle D'MP = \angle P'MD' + \beta = \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} + \beta = \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha - \beta}{2}$$

Тогда $\omega_z = \angle DMD' = \frac{\alpha - \beta}{2}$. Учитывая соотношения (8) и (9), получим:

$$\omega_z = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial U_y}{\partial x} - \frac{\partial U_x}{\partial y} \right) \quad (11)$$

По аналогии:

$$\begin{aligned} \omega_y &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial U_x}{\partial z} - \frac{\partial U_z}{\partial x} \right) \\ \omega_x &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial U_z}{\partial y} - \frac{\partial U_y}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

Разложим малую деформацию (6) на удлинения, сдвиги и повороты:

$$\begin{cases} \Delta U_x = \overbrace{\frac{\partial U_x}{\partial x}}^{e_{xx}} \cdot dx + \frac{\partial U_x}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial U_x}{\partial z} \cdot dz \\ \Delta U_y = \frac{\partial U_y}{\partial x} \cdot dx + \overbrace{\frac{\partial U_y}{\partial y}}^{e_{yy}} \cdot dy + \frac{\partial U_y}{\partial z} \cdot dz \\ \Delta U_z = \frac{\partial U_z}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial U_z}{\partial y} \cdot dy + \overbrace{\frac{\partial U_z}{\partial z}}^{e_{zz}} \cdot dz \end{cases}$$

Для выделения сдвигов и поворотов добавим ко всем уравнениям и отнимем из них полусуммы смешанных производных:

$$\begin{cases} \Delta U_x = e_{xx} \cdot dx + \frac{\partial U_x}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial U_x}{\partial z} \cdot dz \pm \frac{1}{2} \frac{\partial U_y}{\partial x} \cdot dy \pm \frac{1}{2} \frac{\partial U_x}{\partial z} \cdot dz \\ \Delta U_y = \frac{\partial U_y}{\partial x} \cdot dx + e_{yy} \cdot dy + \frac{\partial U_y}{\partial z} \cdot dz \pm \frac{1}{2} \frac{\partial U_x}{\partial y} \cdot dx \pm \frac{1}{2} \frac{\partial U_z}{\partial y} \cdot dz \\ \Delta U_z = \frac{\partial U_z}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial U_z}{\partial y} \cdot dy + e_{zz} \cdot dz \pm \frac{1}{2} \frac{\partial U_x}{\partial z} \cdot dx \pm \frac{1}{2} \frac{\partial U_y}{\partial z} \cdot dy \end{cases}$$

Проведём преобразования на примере первого уравнения:

$$\begin{aligned} \Delta U_x &= e_{xx} \cdot dx + \frac{\partial U_x}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial U_x}{\partial z} \cdot dz \pm \frac{1}{2} \frac{\partial U_y}{\partial x} \cdot dy \pm \frac{1}{2} \frac{\partial U_x}{\partial z} \cdot dz = \\ &= e_{xx} \cdot dx + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial U_x}{\partial y} \cdot dy + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial U_x}{\partial y} \cdot dy + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial U_x}{\partial z} \cdot dz + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial U_x}{\partial z} \cdot dz \pm \frac{1}{2} \frac{\partial U_y}{\partial x} \cdot dy \pm \frac{1}{2} \frac{\partial U_x}{\partial z} \cdot dz = \\ &= e_{xx} \cdot dx + \frac{1}{2} \cdot \overbrace{\left(\frac{\partial U_x}{\partial y} + \frac{\partial U_y}{\partial x} \right)}^{e_{xy}} \cdot dy + \frac{1}{2} \cdot \overbrace{\left(\frac{\partial U_x}{\partial y} - \frac{\partial U_y}{\partial x} \right)}^{-\omega_z} \cdot dy + \frac{1}{2} \cdot \overbrace{\left(\frac{\partial U_x}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial x} \right)}^{e_{zx}} \cdot dz + \frac{1}{2} \cdot \overbrace{\left(\frac{\partial U_x}{\partial z} - \frac{\partial U_z}{\partial x} \right)}^{\omega_y} \cdot dz = \\ &= e_{xx} \cdot dx + e_{xy} \cdot dy + e_{zx} \cdot dz + \omega_y \cdot dz - \omega_z \cdot dy \end{aligned}$$

И окончательно, проводя аналогичные преобразования для всех уравнений системы:

$$\begin{cases} \Delta U_x = e_{xx} \cdot dx + e_{xy} \cdot dy + e_{zx} \cdot dz + \omega_y \cdot dz - \omega_z \cdot dy \\ \Delta U_y = e_{yx} \cdot dx + e_{yy} \cdot dy + e_{yz} \cdot dz + \omega_z \cdot dx - \omega_x \cdot dz \\ \Delta U_z = e_{zx} \cdot dx + e_{zy} \cdot dy + e_{zz} \cdot dz + \omega_x \cdot dy - \omega_y \cdot dx \end{cases} \quad (12)$$

Получается, что малая деформация полностью описывается удлинениями, сдвигами и поворотами. Систему (12) можно разделить на две части, сгруппировав первые три слагаемые каждого уравнения в первую группу и последние два слагаемые — во вторую. За этим очевидным разделением стоит фундаментальное разложение теории поля — *разложение Гельмгольца*, в соответствии с которым произвольное векторное поле $\vec{U}(x, y, z)$ может быть представлено в виде суммы двух своих компонент: безвихревой $\vec{U}_p(x, y, z)$ и соленоидальной $\vec{U}_s(x, y, z)$, если тому не препятствует неопределённость дивергенции и ротора:

$$\vec{U} = \vec{U}_p + \vec{U}_s \quad (13)$$

Рассмотрим потенциальное (безвихревое) поле $\vec{U}_p(x, y, z) = U_{Px} \cdot \vec{i} + U_{Py} \cdot \vec{j} + U_{Pz} \cdot \vec{k}$. В проекциях на оси можно записать:

$$\begin{cases} U_{Px} = e_{xx} \cdot dx + e_{xy} \cdot dy + e_{zx} \cdot dz + \omega_y \cdot dz - \omega_z \cdot dy \\ U_{Py} = e_{yx} \cdot dx + e_{yy} \cdot dy + e_{yz} \cdot dz + \omega_z \cdot dx - \omega_x \cdot dz \\ U_{Pz} = e_{zx} \cdot dx + e_{zy} \cdot dy + e_{zz} \cdot dz + \omega_x \cdot dy - \omega_y \cdot dx \end{cases}$$

Для указанного поля существует функция $\Phi(x, y, z)$, называемая *скалярным потенциалом* упругих смещений, такая что градиент этой функции создаёт безвихревое поле:

$$\begin{aligned} \Phi(x, y, z) &= \frac{1}{2} \cdot (e_{xx} \cdot dx^2 + e_{yy} \cdot dy^2 + e_{zz} \cdot dz^2 + 2e_{xy} \cdot dx \cdot dy + 2e_{zx} \cdot dx \cdot dz + 2e_{yz} \cdot dy \cdot dz) \\ \vec{U}_p &= \text{grad } \Phi \end{aligned} \quad (14)$$

При этом $\text{rot } U_p = \text{rot grad } \Phi = \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \Phi = 0$

Со скалярным потенциалом связаны относительные удлинения и сдвиги, которые образуют упорядоченную матрицу размера 3×3 :

$$\begin{pmatrix} e_{xx} & e_{xy} & e_{xz} \\ e_{yx} & e_{yy} & e_{yz} \\ e_{zx} & e_{zy} & e_{zz} \end{pmatrix}$$

Вторая половина разложения Гельмгольца описывает вихри, задаваемые вектором $\vec{U}_s(x, y, z)$. Для этого поля существует функция $\vec{\Psi}(x, y, z)$, называемая *вектор-потенциалом*.

лом упругих смещений, такая что ротор этой функции создаёт соленоидальное поле:

$$\begin{aligned}\Psi(x, y, z) &= x \cdot (\omega_y y + \omega_z z) \vec{i} + y \cdot (\omega_z z + \omega_x x) \vec{j} + z \cdot (\omega_x x + \omega_y y) \vec{k} \\ \vec{U}_s &= \vec{\nabla} \times \vec{\Psi} = \text{rot } \vec{\Psi}\end{aligned}\quad (15)$$

В данном случае $\text{div } \vec{U}_s = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{\Psi}) = 0$.

$\vec{U}_p$ соответствует полю продольных волн (полю чистых деформаций).

$\vec{U}_s$ соответствует полю поперечных волн (полю чистых вращений).